Elaboración de Apuntes para
la Unidad Didáctica

Vectores en el Plano

Antonio F. García Sevilla

Trabajo de Fin de Máster

UNED
Facultad de Educación

Elaboración de Apuntes para la Unidad Didáctica de Vectores en el Plano

Trabajo de Fin de Máster

Antonio García Sevilla

Febrero 2020

Tutora: Lidia Huerga Pastor

Máster Universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas
Especialidad de Matemáticas
Universidad Nacional de Educación a Distancia

A mis padres y a todos mis profesores,
de quienes me viene en la sangre y en
el alma el gusto por la enseñanza.

Dicen los maestros estrategas que ningún plan sobrevive al contacto con el enemigo. Sin embargo, ninguno de ellos aboga por ir a la batalla sin un plan, o varios, bajo el brazo.

Afortunadamente, la educación no es la guerra. No hay vencedores ni vencidos, ni víctimas ni heridos, salvo quizá el orgullo y el amor propio ocasionalmente. Pero los mismos principios generales aplican, y no conviene ir al campo de batalla (el aula) si un plan o dos bajo el brazo.

La programación didáctica es el plan maestro, la estrategia global, con la que conquistar el aprendizaje. Los ejercicios, problemas y formas de explicar son maniobras y tácticas, que hay que conocer porque en el transcurso de la lección, adaptándonos a la circunstancia de cada momento, podremos utilizarlos, abandonarlos, y modificarlos, como nuestra experiencia e instinto nos digan que es mejor.

Pero entre la programación y el discurso docente, existe un nivel intermedio, el plan para una batalla concreta: la unidad didáctica. Este plan tiene que tener en cuenta el objetivo establecido por el general: conquistar tal o tal otro tema, y pasando por los objetivos estratégicos de las competencias a desarrollar. Pero una vez llegado el momento, hace falta más. Hay que tener en cuenta el terreno y la disposición geográfica, que son los apartados a desarrollar. Hay que planificar las tácticas a usar para asaltar cada castillo, llevar munición de problemas y ejercicios preparados para ello. Pero si un día llueve, el plan tiene que ser flexible, y permitirnos descansar o dar un rodeo. Porque hay veces que la vida cotidiana del centro interfiere en nuestra programación, y hay que estar preparado para ello. Tampoco hay que olvidarse del tren de suministros, pues no podemos agotar a los caballos ni a los alumnos, y el ritmo de avance tiene que ser exigente pero no excesivo.

Cuando empecé a el prácticum de este máster de formación de profesorado, especialidad de Matemáticas, yo era sólo un lugarteniente, observando los ires y venires de mi profesor tutor, aprendiendo las tácticas y maniobras del día a día de la asignatura. Gracias a mi profesor tutor, empecé a aprender cuestiones fundamentales del combate: cómo llevar a los alumnos hasta el objetivo a conseguir, vigilando el ritmo para que ninguno se quedara atrás ni se aburriera. Cómo ser a veces amable, a veces más estricto, para gestionar el ambiente del aula. Técnicas de resolución de problemas, trabajo en grupo, como intercalar la teoría y la práctica, el peso y la importancia relativa de ambas. En definitiva, táctica educativa, el lidiar con la enseñanza y el aprendizaje en la distancia corta.

Pero después me tocó liderar al ejército en mi propia Unidad Didáctica. Apoyado moralmente por mi profesor, con la red de apoyo de mis compañeros del máster y del centro educativo, pero en definitiva solo ante el peligro. Con el objetivo de ir a este encuentro preparado, me empapé del material existente, le di vueltas al asunto, y preparé una estrategia extensa y detallada para acometer con éxito la unidad que me tocaba dar: “Vectores en el Plano”.

Fui a clase con mis apuntes bajo el brazo, y pasó lo que era de esperar: el plan no sobrevivió al contacto con el enemigo. El día a día me hizo cambiar de idea, reordenar apartados, hacer más hincapié en unos ejercicios, y pasar por encima de otros. La realidad de los alumnos y de la vida en el centro educativo significaba adaptarme, hacer un ejercicio de improvisación y adaptación diaria que me dejaba exhausto. Sin embargo, aunque maltrecho por la tozuda realidad, el plan original, o quizá simplemente el hecho de haberlo preparado, fue un apoyo fundamental que me permitió salir airoso de la situación, y creo que también significó que los alumnos aprendieron lo que tenían que aprender.

Pasado el estrés de las prácticas, con reposo y calma, pude reflexionar sobre lo que había hecho bien en la preparación de la unidad, qué técnicas fueron exitosas y qué se podía mejorar. Como me quedé con las ganas de aplicarlo realmente, pedí que éste fuera el tema de mi Trabajo de Fin de Máster, y aquí nos hallamos. Espero que mi experiencia sirva al lector para preparar su batalla, bien siguiendo el plan bien inspirándose en él para desarrollar el propio.

Índice general

1 Introducción

Durante el máster, hemos aprendido que la Unidad Didáctica es una unidad de acción docente fundamental. En la unidad didáctica confluyen el plan global de la asignatura y el ciclo, plasmados en la programación didáctica, y la acción docente del día a día, el temario a impartir, los ejercicios, actividades, y la evaluación.

Además, en distintas asignaturas hemos visto técnicas para la planificación, creación e impartición de la unidad didáctica. En algunas asignaturas conocíamos a los alumnos y su psicología, en otras métodos docentes y técnicas para la época actual, en la que la didáctica está cambiando por la globalización, las nuevas tecnologías, y el paso de una educación más bien propedéutica a una visión de la educación más holística, de formación del individuo.

En las asignaturas de especialidad repasábamos el temario y los contenidos, quizá olvidados, y también la forma de plantearlos, y cómo crear ejercicios y actividades.

Todo esto se combina para crear la unidad didáctica, pero, ¿cuál es el producto final? ¿Un montón de conocimientos y planes en la mente del docente? ¿Un conocimiento vago de las actuaciones a seguir y cómo encajan en el esquema global?

Cuando participé en las prácticas en el centro educativo, quizá por mi personalidad o mi manera de enseñar, o por el contexto con el que me encontré, necesitaba plasmar estos planes en algo concreto, un documento o serie de documentos que me sirvieran de guía. A falta de libro de texto, que quizá supla esta función a menudo, es habitual entre los docentes de matemáticas tener una colección de apuntes propios, en la que se marcan los contenidos y la manera de transmitirlos, así como otras actividades y ejercicios. Con el paso del tiempo, estos apuntes van adquiriendo cuerpo, e incorporando la experiencia personal del docente.

En mi caso, partí de los apuntes de mi profesor tutor en el centro de prácticas, apuntes curados ya a lo largo de varios años. Los grupos de los que estaba encargado mi tutor eran las matemáticas de 3° y 4° de la ESO, y para mi intervención activa elegimos los dos grupos de 4°, cada uno de unos treinta alumnos. La asignatura para ambos grupos era la misma, "Matemáticas Académicas" (orientadas a bachilleratos de ingeniería y ciencia). Todos los alumnos de este centro elegían esta opción en lugar de "Matemáticas Aplicadas" para no cerrarse puertas en el futuro, puesto que la elección viene muy condicionada por la futura elección de bachillerato o formación profesional. Esto significaba, sin embargo, que la diferencia de motivación y preparación entre los grupos era evidente, pero resultó más un problema de acción docente inmediata, en el aula y en el discurso, que de contenido o planificación. Al ir el temario sincronizado en ambos grupos (día arriba día abajo), podía desarrollar una única Unidad Didáctica de manera paralela en los dos, y en el calendario esta resultó ser la correspondiente a "Vectores en el Plano".

Los apuntes de mi profesor tutor eran muy completos, y con ejercicios abundantes, pero eran muy personales suyos, y omitían mucho conocimiento que estaba en su cabeza pero no plasmado en ninguna parte. Además, no incorporaban las técnicas que yo había aprendido en el máster, ni mi estilo personal como docente, por lo que decidí sobre la marcha elaborar unos apuntes propios. Aunque esto no fue posible por completo durante las prácticas, quise acabar la tarea, y se convirtieron en el germen de este Trabajo de Fin de Máster.

Objetivo

El objetivo de este trabajo es, por tanto, utilizar los conocimientos del máster y la experiencia ganada en las prácticas para elaborar unos apuntes que sirvan como guía y marco para una unidad didáctica, en este caso la de "Vectores en el plano" correspondiente a las matemáticas académicas de 4° de la ESO.

Para ello, en el capítulo 2 se estudian primero el contexto y estado de la cuestión, tanto desde el punto de vista matemático, repasando los conceptos formales fundamentales del álgebra vectorial; como desde el punto de vista didáctico y de organización. Una vez visto esto, se crean unos apuntes que siguen el guión de la unidad didáctica, intercalando teoría y práctica y siguiendo una narrativa dirigida a los alumnos que cree en ellos el aprendizaje y competencias necesarias. Para la elaboración de estos apuntes, se estudia la herramienta informática LaTeX, utilizada de manera profesional en el mundo de la matemática.

Además, por sugerencia de la tutora del TFM, se han elaborado unas actividades de GeoGebra, otra herramienta informática, que complementan el temario. Aunque durante las prácticas no tuve acceso a esta aplicación, la dinamicidad y gran potencial visual que aporta complementa idealmente los contenidos tanto geométricos como algebraicos de la unidad.

Es en el capítulo 3 donde se utiliza lo indicado para crear los apuntes y las actividades, y finalmente en los capítulos 4 y 5 se hace un breve análisis de los resultados conseguidos, y se obtienen unas conclusiones.

2 Fundamentación teórica

Para elaborar nuestros apuntes con éxito, necesitamos repasar primero los fundamentos teóricos necesarios. En nuestro caso, lo primero son las matemáticas que subyacen al tema, que repasamos brevemente (dando por supuesto el conocimiento del lector de los formalismos implicados). Después, debemos entrar en materia propiamente dicha, es decir, cómo elaborar una unidad didáctica, el estado de la cuestión y lo que sobre ella han dicho expertos con anterioridad.

2.1. Álgebra Vectorial[1]

Puesto que los apuntes van dirigidos a alumnos de secundaria, nos restringimos a los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, por su importancia geométrica y en la matemática aplicada. En concreto, en 4° de la ESO, como introducción a la materia sólo se ve $\mathbb{R}^2$, también conocido como el plano cartesiano. Los vectores de este espacio son los pares de números reales

[1]Para mayor detalle y rigor en los conceptos básicos del Álgebra Vectorial, y un tratamiento formal matemático, véanse los textos utilizados como base: Hernández (2012), Merino González y Santos Aláez (2006).

$\vec{v} \in \mathbb{R}^2 = (v_1, v_2)$, cuyas coordenadas en la base canónica $\{(1,0),(0,1)\}$ son precisamente las componentes del par.

En este espacio, la suma de vectores se define coordenada a coordenada: $(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$, al igual que la multiplicación por escalar: $a \cdot (u_1, u_2) = (au_1, au_2)$. La resta no es sino la suma del opuesto aditivo, resultado gracias a la estructura de cuerpo de $\mathbb{R}$ de multiplicar por -1.

Finalmente, por su importancia geométrica, veremos una herramienta más: el producto escalar. Esta operación nos lleva del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ a la recta real $\mathbb{R}$: $\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $\cdot$ es aplicación bilineal (lineal en sus dos componentes, preservando la suma y producto por escalar), simétrica y definida positiva. No nos detenemos en la definición formal y las características enumeradas, porque aunque se pueden definir infinitos productos escalares sobre un espacio vectorial, para nuestros propósitos nos interesa el producto canónico, dado por $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum u_i \cdot v_i$, donde u_i y v_i son las coordenadas de $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Es decir, en $\mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{(u_1, u_2)} \cdot \overrightarrow{(v_1, v_2)} = u_1 v_1 + u_2 v_2$.

Este producto escalar nos permite relacionar el espacio vectorial abstracto, que manejamos de manera algebraica, con el plano cartesiano de la geometría euclídea, conocido por los alumnos. Gracias al producto escalar podemos definir una norma (módulo) para los vectores, de la que obtenemos una distancia para los puntos, y un ángulo entre vectores y las nociones asociadas de paralelismo y perpendicularidad. Estas nociones coinciden con las nociones clásicas e intuitivas de la geometría, lo cual es el objetivo de todo el desarrollo previo.

Como norma de un vector $\vec{v}$ utilizamos $|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. Para el ángulo, utilizamos otra definición de producto escalar, de motivación geométrica, que coincide en valor con la escrita anteriormente: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha$, donde α es el ángulo que forman. Esta definición se puede utilizar para calcular el producto escalar sabiendo el ángulo y los módulos (que podemos obtener, por ejemplo, midiendo con regla y transportador de ángulos), o, más habitualmente, para calcular el ángulo teniendo la expresión en coordenadas de los vectores:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Donde lógicamente $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son no nulos.

Con esto acabamos el contenido a impartir en esta unidad. Puede parecer breve, pero sienta las bases para el entendimiento algebraico y geométrico de una herramienta tan útil como es el álgebra lineal.

Vistas las formalidades, necesitamos estudiar cómo presentarlas en una unidad didáctica de manera correcta y pedagógica y adaptada al contexto educativo de 4° de la ESO.

2.2. Modelos de elaboración de una Unidad Didáctica

Según Fernández Gonzáles y col. (2007), hay una serie de modelos para la elaboración de unidades didácticas, determinados principalmente por la actitud del profesor respecto a qué es lo que debe guiar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Los modelos **transmisor** y **tecnológico** son los que podríamos considerar clásicos, basados en los contenidos u objetivos a impartir y conseguir, respectivamente. La diferencia entre planificar basados en contenidos u objetivos es sutil, pero una vez hemos decidido la estructura general de la unidad, la metodología es similar.

Los autores plantean otros modelos, como el **artesano-humanista** o el de **descubrimiento**, que requieren de un entorno educativo muy específico, en el que metodologías alternativas tengan más cabida. En el contexto en el que nos encontramos, las competencias y contenidos a transmitir vienen marcadas bien por ley, bien por las exigencias de la programación educativa a nivel de la etapa, por lo que hay menos espacio para innovar. Sin embargo, aunque no se puedan abrazar por completo, las ideas de estos modelos nos pueden ayudar a plantear la motivación para los contenidos, incluso si éstos vienen dictados por una planificación más "clásica".

El último modelo que se propone, llamado **constructivista**, nos pide basar nuestra aproximación en construir el conocimiento a partir del que ya tienen los alumnos. En base a este modelo, la propia programación didáctica del curso (y la etapa) tiene que seguir un camino natural, en el que no se den saltos sin sentido entre los contenidos, sino que cada paso sirva para construir el siguiente. Las "exigencias del guión" no siempre nos permiten hacer esto de manera continua (y menos aún derivable), pero dentro de lo que se pueda, este enfoque basado en la psicología del aprendizaje mejora la retentiva, al repasar y utilizar conceptos anteriores, y aumenta la motivación al ver los alumnos mejor la relación entre los temas y apartados.

Aunque Fernández Gonzáles y col. (2007) ponen mucho énfasis en estos últimos modelos durante toda su obra, las propuestas que hacen se pueden adaptar con éxito a un modelo más basado en contenidos, que elegimos en este trabajo por las restricciones del contexto. Por ejemplo, a la hora de seleccionar los propios contenidos, se hace una distinción entre contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales. Incluso siguiendo el guión de una planificación más clásica, estos contenidos adicionales se pueden tener en cuenta, y asociarlos al contenido conceptual con el que mejor encajen, o desarrollarlos en paralelo a los apartados conceptuales.

Por otro lado, una apreciación muy importante que se hace, en opinión del autor de este trabajo, es sobre la visión de la ciencia que tenemos los profesores, y que vamos a impartir a los alumnos. Los científicos pecamos, y quizá los matemáticos en particular, de ver la ciencia como un cuerpo de contenidos ya creado, completo, rígido y quieto salvo revolución paradigmática, como diría Kuhn (1962), o simplemente susceptible a crecimiento en los bordes mediante la investigación actual. Esta frontera, por supuesto, queda muy lejos de los alumnos de la secundaria, quienes se enfrentan a conocimientos en algunos casos establecidos hace siglos.

Esto hace que a menudo observemos una filosofía excesivamente deductiva en la enseñanza de Matemáticas, incluso a nivel universitario. Las ecuaciones, teoremas y demás "verdades" son presentadas en su formulación lógica y formal, y a partir de ellas estudiamos las conclusiones, qué podemos calcular y qué no, etc. Sin embargo, este procedimiento no es especialmente natural, y de hecho no refleja la manera en la que se *hacen* las matemáticas. Una aproximación más inductiva[2], en la que examinemos primero lo que sabemos y lo que nos dice la intuición, y a partir de ahí intentemos construir la matemática, es un aprendizaje más significativo pues relaciona las respuestas con las preguntas, que vienen motivadas por situaciones previas que resolver.

[2]Para leer más sobre métodos de enseñanza de Matemáticas, en concreto los métodos inductivo y deductivo, ver el clásico "The teaching of mathematics" (Young, 1968).

Aunque determinadas formulaciones y apartados a tratar nos vienen impuestos por el contexto, y el objetivo principal de esta etapa es conocer las bases del formalismo algebraico de los vectores, podemos utilizar un enfoque más investigador e inductivo gracias a la búsqueda del entendimiento geométrico de los conceptos.

2.3. Esquema de la Unidad

Utilizando los modelos transmisor y tecnológico para desarrollar nuestra unidad, lo primero que tenemos que estudiar es cuál es el contenido a impartir, cuáles son las competencias a desarrollar en este tema para los alumnos. Nos circunscribimos a las matemáticas científicas de 4° de la ESO, y este contexto nos tiene que guiar y dar las respuestas a esta cuestión. Pero recordando Fernández Gonzáles y col. (2007), no debemos tener un enfoque excesivamente propedéutico, y buscar más el aprendizaje significativo que cumplir una lista de la compra.

Desde el punto de vista de la Matemática como disciplina en sí, uno diría que lo fundamental a aprender en la unidad de “Vectores en el Plano” son los espacios vectoriales, y conceptos asociados como la dimensión y la base. Sin duda, los temarios de Álgebra Lineal de universidad empiezan por allí. Sin embargo, estas cuestiones abstractas no son las pertinentes para el contexto en el que estamos. El entendimiento y competencia a desarrollar tienen que ir en esa dirección, bases sobre las que profundizar y completar el conocimiento los alumnos que sigan esa especialización profesional, pero el formalismo y la abstracción del álgebra no son necesariamente la introducción más didáctica.

No hay que olvidar, además, que muchos de los alumnos también tienen la asignatura de Física en este mismo momento. En esa asignatura, por cuestiones de organización de temario y tiempos, es probable que ya estén manejando el concepto de vector, e incluso haciendo cálculos con ellos. Aunque no podemos olvidar que hay alumnos que no tendrán esa asignatura, podemos aprovechar durante la práctica docente esta motivación existente para elegir e introducir los contenidos. Este enfoque constructivista puede beneficiar a los alumnos a los que va dirigido, afianzando los conceptos al verlos desde el punto de vista más formal de la matemática y aplicado en la física.

Además, también tenemos que aprovechar este momento, en el que los alumnos están empezando a ser expuestos al concepto de vector y a su manejo algebraico, para crear en ellos un entendimiento y competencias profundas sin que caigan en malos hábitos ni ideas equivocadas, propiciadas por un posible reduccionismo en el aprendizaje de otras materias.

Para los alumnos que no tengan física, sin embargo, este enfoque no está completamente perdido. Las cuestiones de la mecánica clásica son más o menos intuitivas para todos los estudiantes de matemáticas académicas, y pueden servir como motivación para la investigación o el descubrimiento de los temas a tratar.

A alto nivel, los contenidos tanto conceptuales como procedimentales a cubrir serán los siguientes:

1. Comprensión del concepto de vector.
2. Intuición geométrica y espacial de los espacios vectoriales.
3. Manejo algebraico de ecuaciones vectoriales.

Y esto nos debe servir de guía para escoger los apartados más concretos en sí.

2.4. Contenidos de la Unidad

Como vimos en el capítulo anterior, una de las cuestiones a tener en cuenta para la selección de contenidos según Fernández Gonzáles y col. (2007) son los procedimientos y actitudes. En nuestro caso, complementando los apartados formales que "entran en el examen" del tema, tenemos un imperativo claro: queremos que todos los conceptos se vean tanto algebraicamente como geométricamente. Con esto queremos fomentar la actitud de comprensión profunda, al relacionar continuamente los conceptos algorítmicos con la visión espacial intuitiva de cada alumno.

Por otro lado, también hay que tener en cuenta de dónde vienen los alumnos. En nuestro caso de estudio, la unidad de vectores es inmediatamente posterior a la unidad de trigonometría. Los alumnos, por tanto, ya tienen un inicio de intuición en cuanto a la relación entre el álgebra y la trigonometría, y tienen la herramienta fundamental de las funciones trigonométricas que podremos aplicar a la medida de ángulos entre vectores. Esto además supondrá un buen repaso de la teoría y práctica ya vista, lo que mejorará el aprendizaje significativo (Moreira, 2008).

En base a los contenidos establecidos por ley, además de la programación didáctica anual, recopilamos los siguientes apartados a tratar:

- Concepto de vector
- Coordenadas
- Operaciones básicas con vectores

    - Suma
    - Resta
    - Multiplicación por escalar

- Vectores fijos
- Producto escalar
- Ángulo entre vectores

El orden de estos apartados no es aleatorio, sino que viene dado por el contexto antes mencionado. Además, sigue un orden de complejidad ascendente, empezando por los conceptos básicos y construyendo sobre ellos. Este enfoque constructivista se beneficiará también de una exposición inductiva, en la que los conceptos formales no se presenten los primeros, sino la problemática y las cuestiones a investigar sean los que los motiven. Sin embargo, el énfasis en la dualidad geométrico-algebraica nos plantea un dilema. Dentro de cada apartado, ¿se debe empezar por la geometría, o el álgebra?

Una posibilidad es presentar todo como una cuestión algebraica, de números y ecuaciones, junto con la ilustración geométrica de los conceptos. El problema de esta versión es que ahonda en la visión mecanicista de la matemática, en la que tenemos unos números y simplemente tenemos que meterlos en una formulita para obtener un resultado.

Pero nuestro objetivo es crear una intuición geométrica suficientemente profunda para que en el futuro, el salto a las tres dimensiones sea motivado, y no sólo un número más, y facilitar el entendimiento de la geometría algebraica que hace acto de presencia importantísimo en el bachillerato, por lo que preferimos utilizar la intuición geométrica como guía, y acompañarla, o incluso derivar de ella, el cálculo formal.

Esta aproximación es más inductiva, en el espíritu de Young (1968), y el autor considera que más didáctica.

Cómo presentar el producto escalar

Elaborando los apuntes, y siguiendo nuestra filosofía de motivar el cálculo con la intuición espacial, nos encontramos un problema en el apartado del Producto Escalar. Éste es una herramienta importantísima del álgebra vectorial. Además de establecer un mecanismo formal para las relaciones angulares entre vectores, uniendo eficazmente a Euclides con Newton, es la base de mucha instrumentación futura de gran uso por parte de matemáticos, físicos e ingenieros. Recordamos la definición geométrica:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha$$

para dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \in V$, siendo $|\vec{u}|, |\vec{v}|$ sus módulos y α el ángulo que forman.

Pero, ¿cómo motivar esta fórmula? La motivación real es precisamente una mano lanzada desde el álgebra a la geometría, relacionando el concepto fundamental de base vectorial con la estructura geométrica fundamental del espacio. Pero éste es el sentido opuesto a la exposición que estamos realizando. ¿Debemos entonces replantearnos nuestra decisión de motivar geométricamente, o cambiar aquí el procedimiento?

Podríamos también dar la fórmula, sin mayor explicación, y decir a los alumnos que en el futuro quizá entenderían su motivación. Sería un atajo aceptable en el contexto educativo real, en el que hay que acabar el temario, y la motivación e interés de muchos alumnos no son seguros. Pero también podemos hacer un pequeño esfuerzo, e intentar ya de paso cimentar la competencia tan importante en matemática y ciencia que es la experimentación y el análisis crítico.

Además, nos guiamos del uso que van a hacer los alumnos a corta plazo de esta herramienta: medir ángulos, y del hecho de que tienen fresco en la cabeza todo lo relacionado con las funciones trigonométricas.

Para ello, partimos de una pregunta. Hemos visto sumas y restas de vectores, ¿qué es lo siguiente? Naturalmente, multiplicar. Podemos aquí interrogar a los alumnos sobre el sentido geométrico que tendría multiplicar un vector con un vector, y cuál debería ser el resultado. Algebraicamente tiene más sentido (para ellos): multiplicamos componente a componente. Se puede ver aquí los resultados geométricos de este producto (de Hadamard), y comprobar que no tiene mucho sentido geométrico.

Pero, ¿y si sumamos las componentes? Esto debe ser una sorpresa para los alumnos, pues nada que hayamos visto nos hace suponer que esto es algo a contemplar. Si se incide en este punto, esta sorpresa y falta aparente de sentido, quizá consigamos que se les quede mejor en la memoria, y evitaremos una de las fuentes de error más habituales en estos alumnos: multiplicar componente a componente y olvidarse de sumar (lo que bloquea el ejercicio por completo, al obtener un vector en lugar de un escalar).

Pidiendo paciencia a los alumnos, podemos ahora examinar las propiedades de esta operación recién definida:

$$\overrightarrow{(u_1, u_2)} \cdot \overrightarrow{(v_1, v_2)} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

¿Qué pasa si multiplicamos vectores paralelos? Haciendo cálculos, podemos ver que el producto escalar tiene relación con el producto de los módulos. Damos la primera pista a los alumnos: el producto escalar es proporcional a los módulos. ¿Y si son perpendiculares? ¿Y si su ángulo es $\frac{\sqrt{3}}{2}$? ¿Qué pasa si el ángulo que forman está en el primer cuadrante, segundo cuadrante, ...? Así, poco a poco, podemos ir completando una tabla, que debe recordar a los alumnos a la tabla de los cosenos y los senos del tema de la trigonometría, y finalmente, utilizar esto para llegar a la definición geométrica basada en ángulo y módulo.

2.5. Herramientas informáticas

Ahora que tenemos el guión de la unidad didáctica, y una fundamentación teórica para su elaboración, tenemos que pasar a la redacción de los apuntes que servirán como marco y guía. Para ello, en esta era moderna de los ordenadores, son necesarias herramientas acordes, que nos permitan crear los apuntes de manera eficiente y utilizando las técnicas más apropiadas.

Latex para Matemáticas

La escritura y tipografía de las matemáticas no es una cuestión trivial, por lo que para crear una unidad didáctica que se pueda leer con comodidad, hace falta escoger con cuidado las herramientas. Además, editar una unidad didáctica, así como un trabajo de fin de máster, es un proceso iterativo, en el que se escribe, repasa, corrige y reescribe muchas veces cada sección.

Para este trabajo, se ha utilizado Latex (Lamport, 1994), un software de preparación de documentos muy utilizado en la investigación en matemáticas y física. Uno de los motivos por el que Latex es muy utilizado es que provee formas de escribir matemáticas de manera cómoda, y utiliza luego algoritmos para colocar las variables y elementos de la fórmula o ecuación de manera limpia, estándar, y atractiva visualmente.

Latex se diferencia de otros software de edición de textos en su manera de trabajar. Muchas veces estamos acostumbrados a tener delante un editor visual, en el que vamos introduciendo el texto, y según lo escribimos vemos cómo queda en la página. Aquí podemos modificar este aspecto visual directamente, cambiando tipos de letra, añadiendo encabezados, etc.

En el caso de Latex, primero se escribe el texto en un fichero de texto plano, sin formato. En este fichero (llamado fuente) escribimos el contenido, y no podemos ver el aspecto visual. Posteriormente, el documento se compila, y es aquí donde entra en juego Latex, pues toma nuestros ficheros fuente y los convierte en el documento *PDF* final. Latex se encarga de establecer el aspecto y formato del documento, utilizando métricas y algoritmos determinados por profesionales, y que se están convertido en estándar en muchos campos de la ciencia.

Sin embargo, aunque Latex propiamente dicho sólo se encarga de esta compilación final, en la que convierte nuestra fuente en el documento *PDF*, existen multitud de editores que nos permiten hacer la edición de manera más visual, compilando automáticamente para que veamos el resultado, o incluso ayudándonos formateando el texto según lo escribimos. Ejemplos son TexMaker, LyX u Overleaf, que en este último caso nos permite escribir nuestro documento online de manera colaborativa, introduciendo y editando texto simultáneamente.

Pero para introducir encabezados, secciones, y otras cuestiones tipográficas, incluso si usamos un editor visual, en Latex lo que hay que hacer es introducir comandos. Por ejemplo, para empezar el contenido del documento escribimos `\begin{document}` (antes pueden ir comandos especiales de configuración o formato), y para acabarlo `\end{document}`. Entre esas dos etiquetas escribimos nuestro texto, que podemos dividir en capítulos, secciones, etc., con los comandos `\chapter{Título}`, `\section{Nombre de la sección}`...

Si hacemos esto, Latex lleva la cuenta de los capítulos, secciones y subsecciones, y es posible generar automáticamente un índice de contenidos que se actualiza cada vez que cambiamos algo (tras compilar, eso sí). Para ello, simplemente ponemos el comando `\tableofcontents` en el lugar del documento donde queremos que aparezca. Otras cuestiones que gestiona automáticamente Latex, y que son muy cómodas por tanto de utilizar, son las referencias bibliográficas y las figuras y tablas.

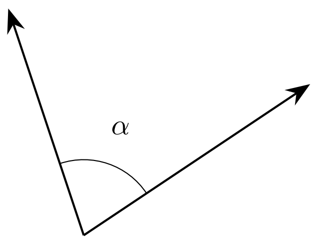
Además, hay muchos comandos que se pueden utilizar para modificar o aumentar la funcionalidad de Latex. También se pueden crear nuevos “paquetes”, que los usuarios luego pueden utilizar para solucionar problemas concretos. Uno de los más útiles para nosotros son los paquetes de la Sociedad Americana de Matemáticas (Voß, 2010), que permiten escribir y formatear matemáticas de manera cómoda y eficaz. Para ello, se escriben entre signos de dólar las ecuaciones directamente, y Latex se encarga de prepararlas. Es necesario conocer los nombres que tienen los distintos símbolos, pero en Internet hay muchos recursos donde se pueden consultar, y además tienden a seguir una notación intuitiva proveniente del inglés. Por poner un ejemplo, si escribimos

```
$ \forall v \in V, v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 +
    ... + a_n v_n; \; a_i \in K $
```

Obtenemos la expresión de un vector $\vec{v}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v_i}$: $\forall v \in V, v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + ... + a_n v_n; \; a_i \in K$, con los símbolos matemáticos correctos y el espaciado estándar entre los elementos. Por supuesto, la potencia matemática de Latex da para expresar cuestiones mucho más complicadas de formatear, de las que nosotros no vamos a necesitar demasiadas, pero este ejemplo ya nos da una muestra de la comodidad de su uso.

Otro paquete que nos va a servir para diseñar nuestra unidad didáctica es tikz (Crémer, 2011). Este paquete nos permite escribir diagramas a mano, simplemente indicando dónde debe ir cada nodo, y el estilo de cada elemento, y en el paso de compilación de Latex esto se convierte en la figura especificada.

Por ejemplo, pongamos que queremos dibujar el siguiente diagrama para explicar el ángulo entre vectores (utilizado en los apuntes en la página 31).



Para ello, podemos escribir los comandos que se enumeran a continuación.

```
\newcommand{\Vector}[1][black]{
    \draw[arrows={-Stealth[scale=1.4]},thick,#1]
}
\newcommand{\Angulo}[2]{\pic[draw,#1,
    angle eccentricity=1.5, angle radius=1cm]
    {angle = #2}
}
\begin{tikzpicture}
    \coordinate (O) at (0,0);
    \coordinate (A) at (3,2);
    \coordinate (B) at (-1,3);
    \Vector (O)--(A);
    \Vector (O)--(B);
    \Angulo{"$\alpha$"}{A--O--B};
\end{tikzpicture}
```

Este uso de código para los diagramas tiene varias ventajas, pues permite sincronizar más fácilmente la expresión numérica y el gráfico (sólo hay que cambiar los números en ambas fuentes), y además significa que todas las figuras que creemos van a tener un estilo consistente y acorde al resto del texto. Además, los comandos que hemos definido (para vectores y ángulos) podemos reutilizarlos en otras figuras, no teniendo que volverlos a escribir, y automáticamente usando todos el mismo estilo que hemos elegido.

GeoGebra

Los apuntes desarrollados en un documento (en nuestro caso con Latex) y posteriormente explicados a viva voz o plasmados en la pizarra son una herramienta básica del docente.

Sin embargo, a la hora de transmitir la geometría, la voz o la pizarra se nos pueden quedar cortas. La primera es insuficiente para transmitir la visión de conjunto, y la segunda, además de ser estática, depende mucho de la habilidad con la tiza (o rotulador) del profesor.

Si disponemos de cañón en el aula, o de una sala de laboratorio, podemos explotar las ventajas de la informática para suplir o complementar los dibujos en el cuaderno y la pizarra. Además de la comodidad, la precisión y la limpieza visual, los ordenadores presentan la enorme ventaja de la interactividad y dinamismo.

GeoGebra (Hohenwarter y col., 2013) es una aplicación informática disponible online en https://www.geogebra.org/, enfocada a la didáctica de la geometría a todos los niveles mediante la exploración dinámica y visual de esta materia. Además, como dice el nombre, el álgebra es tan presente como la representación visual en esta herramienta, lo que la hace perfecta para nuestro objetivo de crear en los alumnos intuición geométrica y algebraica conjuntas.

Según algunos autores, el uso de GeoGebra redunda en una mayor motivación en el aprendizaje de las Matemáticas (Choi, 2010), debido en parte al uso de una herramienta distinta, que rompe la rutina de la clase, y a las posibilidades creativas y colaborativas de esta herramienta. Además, según Salazar y col. (2012), el uso de una herramienta interactiva permite también construir en el alumno la verificación deductiva partiendo de la intuición espacial y la comprobación visual.

Dentro de GeoGebra hay varias aplicaciones, pero en nuestro caso usaremos la "Calculadora Gráfica" (ver figura 2.1).

Esta aplicación nos ofrece dos vistas a la vez: a la derecha, una especie de papel milimetrado, con ejes cartesianos,

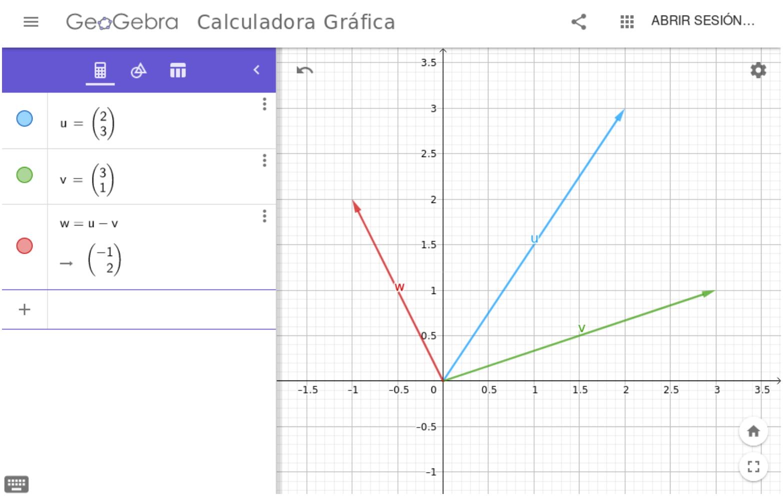


Figura 2.1: La vista principal de la calculadora gráfica de GeoGebra

en los que representar los distintos objetos geométricos que vayamos creando. A la izquierda tenemos un panel calculadora, donde podemos introducir expresiones algebraicas que definan objetos geométricos, los cuales serán representados en el plano de la derecha. En esta calculadora podemos utilizar multitud de operaciones y funciones, suficientes en cualquier caso para el temario de este documento. Las expresiones las podemos escribir directamente, o utilizar la interfaz de ayuda mediante "clics" disponible con uno de los botones del panel.

Una de las ventajas de GeoGebra es que es puramente interactivo. El profesor puede ir haciendo el desarrollo "en directo", y los alumnos ver cómo se va construyendo tanto la geometría como el álgebra al mismo tiempo. También permite resolver dudas rápidamente y sobre el dibujo, usando su interfaz gráfica, que nos permite manipular los objetos directamente moviéndolos con el ratón.

Los alumnos también pueden acceder a GeoGebra en el laboratorio o en sus casas, y los ejercicios y explicaciones se pueden exportar como ficheros que permiten a los alumnos repetir la exploración en su casa, o trabajar sobre un enunciado puramente geométrico para construir la solución.

3 Desarrollo del tema

Ya con los preliminares y antecedentes estudiados, llegamos a elaborar los apuntes, que deben servir como guía para impartir la unidad didáctica de “Vectores en el Plano” para el curso de 4° de la ESO.

Estos apuntes están redactados pensando en dos tipos de público: alumno y profesor. Para el alumno, pretenden presentar los conceptos de manera intuitiva y constructiva, con un flujo narrativo que nos lleve de una cosa a la siguiente sin grandes sobresaltos.

Los conceptos están explicados de manera detallada, en ocasiones en exceso, para que todo alumno del nivel adecuado (4° ESO) sea capaz de seguirlos, y con la repetición que haga falta, construir un entendimiento suficiente de la cuestión además de práctica y soltura con los ejercicios.

Por ello, la práctica está entremezclada con la teoría, pues esto permite al alumno asentar el conocimiento teórico, manejándolo con sus propias manos, además de suponer una alternancia entre el escuchar y el hacer.

Para el profesor, las explicaciones pueden resultar superfluas, o quizá una sugerencia o idea de cómo presentarlas. Están pensadas para ser impartidas a viva voz y de manera natural, como vayan viniendo. Las partes importantes, a copiar por el alumno, están resaltadas como definiciones, notas o fórmulas, y los ejercicios separados en enunciado y solución para permitir manejar el ritmo de trabajo de la clase.

Como último comentario, el autor es plenamente consciente del no excesivo rigor del planteamiento, y de los ocasionales saltos poco justificados. La idea es facilitar en el alumno la creación de una intuición matemática y geométrica sobre los vectores, así como habilidad de cálculo con ellos, más que un conocimiento formal y riguroso de la cuestión.

3.1. ¿Qué es un vector?

Si te digo: "dos metros a la derecha", o "diez centímetros hacia delante", nos entendemos, ¿no? Pero, ¿cómo lo meterías dentro de una fórmula, o un programa de ordenador? En matemáticas, siempre intentamos convertir a números y ecuaciones las ideas que tenemos sobre el mundo. Para expresar las ideas anteriores, ¿qué nos hace falta? Para empezar, una distancia. En el primer caso, "dos metros", que matemáticamente representamos como 2. En el segundo, "diez centímetros". Ojo aquí, si trabajamos en metros, diez centímetros será 0.1, no 10.

Pero con esto no es suficiente. Si te digo, "muévete dos metros", no sabrías qué hacer. ¿Hacia dónde? preguntarías. Así que nos hace falta exactamente eso, una dirección y un sentido. En nuestros ejemplos, "a la derecha" y "hacia delante". En español, a todo eso lo llamamos muchas veces "dirección". En matemáticas, sin embargo, tenemos que tener mucho cuidado y definir las cosas sin dejar lugar a dudas. **¿Cómo**

definirías tú, "a la derecha", usando conceptos matemáticos que ya sabes?

Podrías decir que "a la derecha" es moverte en la recta paralela a la pared de atrás, mientras que "adelante" es paralelo a la pared de al lado. Esa recta es lo que en matemáticas llamamos "dirección". Pero no es suficiente, porque en una recta me puedo mover de dos maneras distintas, hacia un lado o hacia el otro. Por eso hace falta otra cosa, el "sentido", como cuando dices "Es peligroso conducir en sentido contrario". Es decir, para decir "hacia la izquierda", primero decimos "en la recta paralela a la pizarra" y luego decimos que, por ejemplo, "acercándonos a las ventanas". Pero no te olvides que, para alguien que esté mirándote de frente, ¡la derecha y la izquierda van al revés! Afortunadamente, en matemáticas, siempre tenemos la hoja o la pizarra delante, y sabemos cuál es la derecha, donde está arriba, etc.

Recopilando, para decir en matemáticas "dos metros a la derecha", o "diez centímetros hacia delante", necesitamos tres cosas. Primero: una longitud, que es un número, una medida, y a la que llamaremos **módulo**. Segundo: una dirección, que hemos quedado en usar una recta; y finalmente: un sentido, que es cada uno de los dos posibles dentro de esa recta.

¿Y cómo dibujamos esto? Pues cogemos la regla, y en el cuaderno pintamos un segmento horizontal de 2 centímetros de largo (mejor no metros, que no nos caben). ¿Y ya está? ¿Esto es un vector? ¡Casi, no te olvides del sentido! Para indicar el sentido, marcamos con una flecha el final del segmento, en nuestro caso a la derecha. ¡Tan fácil!

Y ahora más serios, un vector es exactamente eso que has dibujado:

Definición 1. Un vector es un segmento de recta orientado.

Nota 1. Los vectores tienen asociados tres elementos: módulo (la longitud), dirección (la recta sobre la que lo trazamos) y sentido (la orientación del vector).

Nota 2. Escribiremos $\vec{u}$, $\vec{v}$, ... para los vectores, y $|\vec{u}|$ para su módulo.

Ej. 1 — Dibuja un vector $\vec{u}$ con módulo 3cm, dirección horizontal y sentido hacia la derecha.

Solución (Ej. 1) — 

Ej. 2 — Dibuja un vector $\vec{v}$ con módulo 1.5cm, dirección vertical, y sentido hacia arriba.

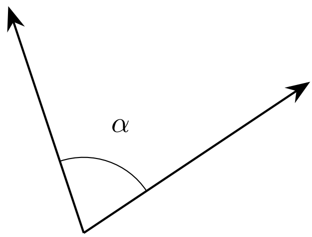
Solución (Ej. 2) — 

Ej. 3 — ¿Qué ángulo forman los dos vectores anteriores?

Solución (Ej. 3) — Intuitivamente, podemos ver que son perpendiculares, y por tanto forman un ángulo de $\boxed{90°}$. Tras leer la siguiente definición, vuelve a este ejercicio y piensa si te cuadra la solución.

Aunque aún no sabemos nada sobre los ángulos de los vectores, sí que sabemos sobre los ángulos entre rectas. Y los vectores tienen una recta asociada, ¿no? ¡La dirección! Efectivamente, el ángulo entre vectores tiene que ver con el ángulo entre las direcciones. Pero si dibujas dos vectores, los extiendes hasta convertirlos en rectas, y ves dónde se cruzan, te encontrarás que hay varios ángulos. ¿Cuál elegir?

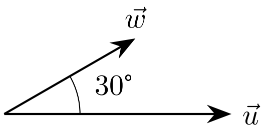
Para decidir esto, hacemos el dibujo un poco diferente: empezamos a dibujar los vectores desde el mismo punto. En este caso ya sólo quedan dos ángulos, y de éstos, elegimos el más pequeño:



Definición 2. El ángulo que forman dos vectores es el ángulo menor de los que forman sus segmentos, cuando los dibujamos con el mismo origen (el punto de partida del segmento).

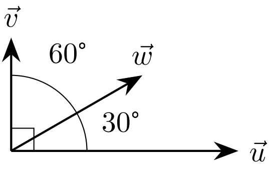
Ej. 4 — Dibuja un vector $\vec{w}$, de módulo 2cm, formando un ángulo de 30° hacia arriba y la derecha de $\vec{u}$.

Solución (Ej. 4) —



Ej. 5 — ¿Qué ángulo forman $\vec{v}$ y $\vec{w}$?

Solución (Ej. 5) — Si recordamos que en entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ había $90°$, entonces el siguiente razonamiento geométrico nos muestra que entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$ hay $90° - 30° = \boxed{60°}$.



3.2. Coordenadas

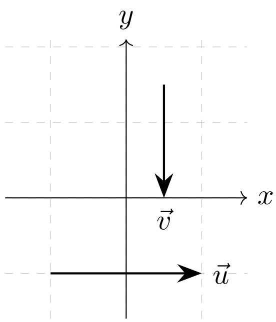
Hasta ahora, hemos utilizado palabras como "recta horizontal", "sentido hacia la derecha", etc., para expresar las direcciones de los vectores. Esto es un rollo, no muy preciso, y además tiene el problema de que "hacia delante" puede significar cosas diferentes si estamos mirando a la pizarra o de espaldas a ella.

Por ello, volvamos a un viejo conocido: el plano cartesiano. ¿Te acuerdas, del origen, los ejes, las coordenadas de un punto? Seguro que sí, ¡y hasta lo dominas!

Ej. 6 — Dibuja un vector $\vec{u}$ paralelo al eje X, de módulo 2, y sentido hacia la derecha.

Ej. 7 — Dibuja un vector $\vec{v}$ paralelo al eje Y, de módulo 1.5, y sentido hacia abajo.

Solución (Ej. 7) —

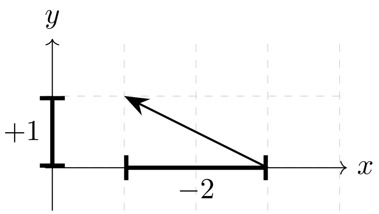


Y si queremos una dirección que no sea paralela a los ejes, ¿qué hacemos? ¿Cómo harías tú para explicarle a alguien una dirección diagonal? Podrías, por ejemplo, decir que por cada paso a la derecha, diera uno al frente. Así, se acabaría moviendo en diagonal. En el plano cartesiano hacemos lo mismo: para expresar cualquier dirección, decimos cuánto hay que moverse paralelos al eje X, y cuánto paralelos al Y. Esto es lo que llamamos **coordenadas cartesianas** de un vector.

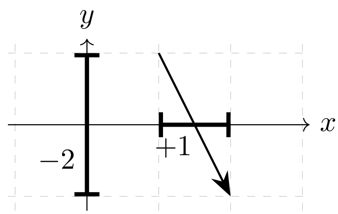
Recordemos también que los ejes de coordenadas están orientados, siendo en X positiva la derecha y en Y positivo hacia arriba. ¡Y esto nos resuelve también la cuestión del sentido del vector! Podemos decir que si nos movemos $+2$ paralelos al eje X, es hacia la derecha, mientras que si nos movemos -1, entonces es hacia la izquierda. Respectivamente, en Y el sentido positivo es hacia arriba, y el negativo hacia abajo.

Definición 3. Las coordenadas de un vector son las componentes paralelas a los ejes X e Y de su segmento de recta, con signo positivo si el sentido es el mismo que el del eje y negativo si opuesto.

Nota 3. Escribimos $\vec{u} = \overrightarrow{(x, y)}$ para un vector de coordenadas x e y.



El vector $\overrightarrow{(-2, 1)}$.

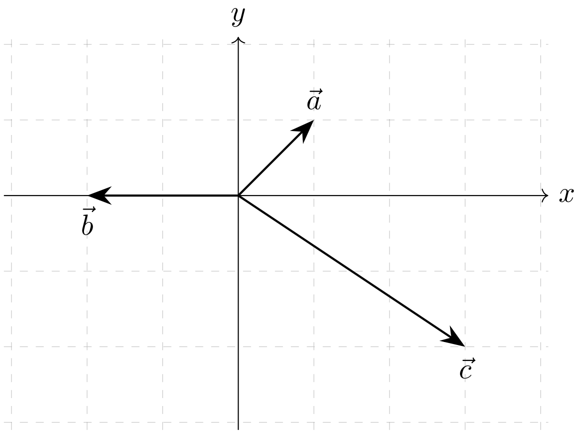


El vector $\overrightarrow{(1, -2)}$.

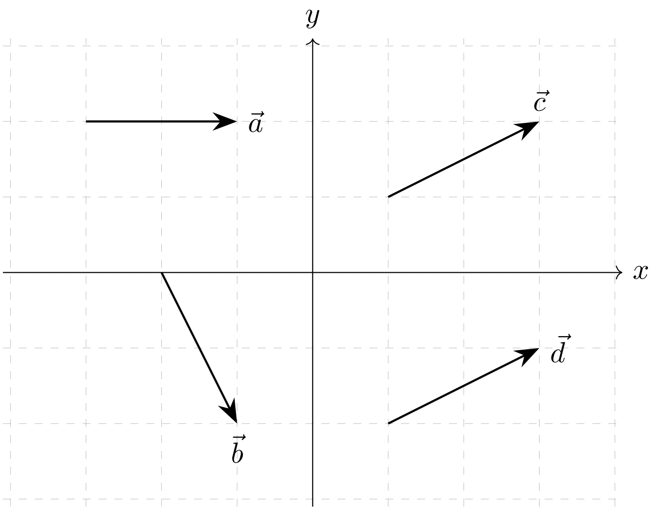
Ej. 8 — Dibuja los siguientes vectores:

$\vec{a} = \overrightarrow{(1,1)}$ $\quad \vec{b} = \overrightarrow{(-2,0)}$ $\quad \vec{c} = \overrightarrow{(3,-2)}$

Solución (Ej. 8) —



Ej. 9 — Calcula las coordenadas de los vectores en el dibujo:



Solución (Ej. 9) —

a) $\vec{a} = \overrightarrow{(2,0)}$

b) $\vec{b} = \overrightarrow{(1,-2)}$

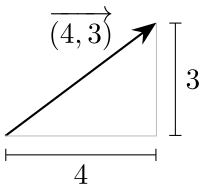
c) $\vec{c} = \overrightarrow{(2,1)}$

d) $\vec{d} = \overrightarrow{(2,1)}$

Nota 4. Observa que $\vec{c}$ y $\vec{d}$ son iguales en el apartado anterior. Esto es porque los vectores con los que estamos trabajando son libres, los podemos dibujar donde queramos.

Ej. 10 — Calcula el módulo del vector $\vec{u} = \overrightarrow{(4,3)}$.

Solución (Ej. 10) — Aunque no nos han dicho todavía cómo calcular esto, con un pequeño dibujo, y acordándonos del tema de trigonometría, podemos resolverlo:



El módulo es la longitud del segmento, y por el teorema de Pitágoras: $|\overrightarrow{(4,3)}| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = \boxed{5}$

Fórmula 1 (Módulo). $|\overrightarrow{(x,y)}| = \sqrt{x^2+y^2}$

Ej. 11 — Calcula el módulo de los siguientes vectores:

a) $\overrightarrow{(1,2)}$

b) $\overrightarrow{(-2,3)}$

Solución (Ej. 11) —

a) $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

b) $\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

3.3. Operaciones con vectores

Ahora que ya sabemos lo que es un vector, sus propiedades, y cómo representarlo, veamos qué podemos hacer con ellos.

Suma

La primera operación es la suma o adición. Si recordamos nuestra idea intuitiva de vector como “dos pasos a la derecha”, y le sumamos otros “tres pasos a la derecha”, ¿qué tenemos? Claramente, “cinco pasos a la derecha”. Pero, ¿y si no tienen la misma dirección? Podemos hacer lo mismo: primero nos movemos a lo largo de un vector, y luego del otro. Gráficamente, para sumar dos vectores, primero dibujamos uno de ellos, y usamos su destino como origen para dibujar el segundo. El vector resultado será el que va desde el origen del primero hasta el destino del segundo, aunque como son vectores libres, luego podremos moverlo de sitio. Observa la figura 3.1 para comprobar cómo funciona la suma de vectores.

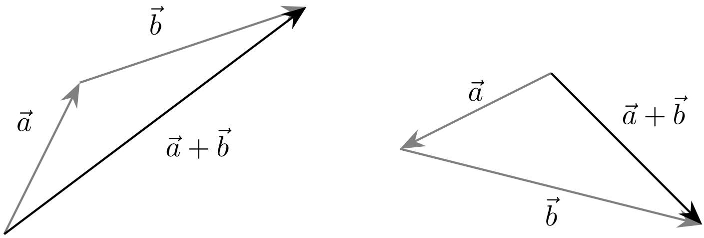


Figura 3.1: Suma geométrica de vectores

Ej. 12 — Calcula geométricamente las siguientes sumas:

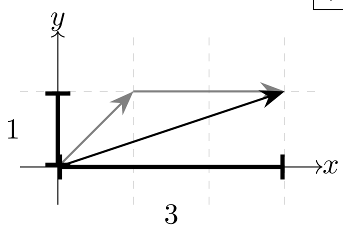
a) $\overrightarrow{(1,1)} + \overrightarrow{(2,0)}$

b) $\overrightarrow{(2,1)} + \overrightarrow{(2,-2)}$

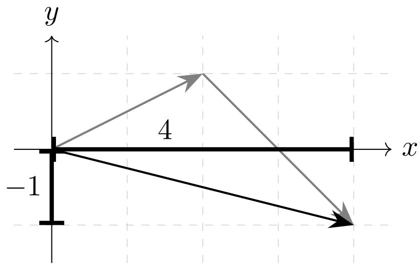
c) $\overrightarrow{(2,-2)} + \overrightarrow{(2,1)}$

Solución (Ej. 12) —

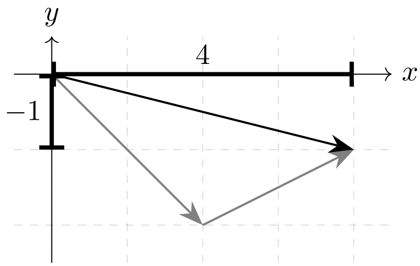
a) La solución es el vector $\boxed{\overrightarrow{(3,1)}}$:



b) $\boxed{\overrightarrow{(4,-1)}}$



c) $\boxed{\overrightarrow{(4,-1)}}$



Fíjate en las soluciones de los apartados b y c. Son iguales, ¿ves por qué? Tanto en b como en c nos piden que sumemos los mismos vectores, simplemente en distinto orden. Igual que cuando sumamos números, al sumar vectores el orden de los factores no altera el resultado, es decir:

Nota 5. La suma de vectores es conmutativa.

Y cuando tenemos más de un vector, ¿cómo hacemos? Geométricamente, hacemos lo mismo que antes. Empezamos dibujando un vector, donde acabamos ponemos el origen del siguiente, y así hasta que hayamos dibujado todos, como se puede ver en la figura 3.2. Esto se conoce como la **Regla del**

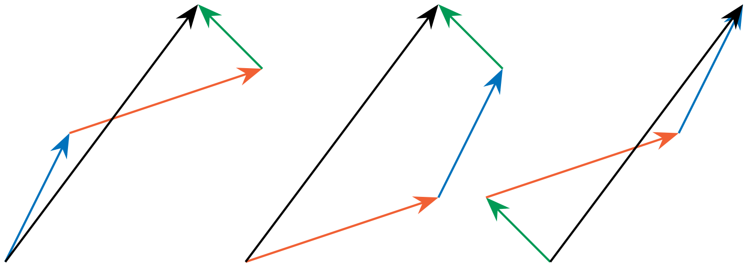


Figura 3.2: Suma de los mismos tres vectores por la regla del camino, siguiendo distintos órdenes.

camino, y gracias a la conmutatividad de la suma, el orden en el que dibujemos los vectores no es importante.

Ej. 13 — Sean $\vec{a} = \overrightarrow{(2,3)}$, $\vec{b} = \overrightarrow{(-1,-2)}$, $\vec{c} = \overrightarrow{(1,-3)}$ y $\vec{d} = \overrightarrow{(-4,0)}$. Calcula:

a) $\vec{a} + \vec{c} + \vec{d}$

b) $\vec{b} + \vec{a} + \vec{d}$

c) $\vec{d} + \vec{b} + \vec{a} + \vec{c}$

Puede que, de tanto sumar vectores, hayas observado una particular propiedad de sus coordenadas. Si no, vuelve atrás, y fíjate en la relación de las coordenadas del vector resultado con las coordenadas de los sumandos. ¡Efectivamente! Las coordenadas x de los vectores suma no son sino la suma de las coordenadas x de los vectores a sumar, y lo mismo pasa con las coordenadas y. Es decir, no hace falta dibujar, podemos hacer el cálculo directamente con la siguiente fórmula:

Fórmula 2 (Suma de vectores).

$$\overrightarrow{(u_x, u_y)} + \overrightarrow{(v_x, v_y)} = \overrightarrow{(u_x + v_x, u_y + v_y)}$$

Ej. 14 — Haz las siguientes sumas:

a) $\overrightarrow{(4, 5)} + \overrightarrow{(7, 2)}$

b) $\overrightarrow{(-2, 3)} + \overrightarrow{(15, -1)}$

c) $\overrightarrow{(1467, 223)} + \overrightarrow{(-578, 902)}$

Solución (Ej. 14) —

a) $\overrightarrow{(12, 7)}$

b) $\overrightarrow{(13, 2)}$

c) $\overrightarrow{(889, 1125)}$

Resta

Ahora que ya sabemos sumar vectores, el siguiente paso es restarlos. ¿Pero qué puede querer decir restar vectores? Si me dicen, "dos pasos a la derecha", y luego, "menos un paso a la derecha", ¿qué haría? Lo más natural es dar sólo un paso en total, que es lo mismo que dar dos pasos a la derecha y luego uno a la izquierda. Es decir, en realidad lo que he hecho es sumar un vector que va "al revés", a la izquierda en vez de a la derecha. ¡Anda! ¿Y no es ésto lo mismo que hacemos con los números? Cuando restamos números, en realidad lo que hacemos es *sumar el opuesto*, ¿no? A lo mejor queda más claro si lo escribo: $5 - 3 = 5 + (-3) = 2$. Pues lo mismo con los vectores, restar un vector de otro significa sumar el vector opuesto. Y, ¿cuál es el vector opuesto? Pues como hemos dicho antes, el que "va al revés", es decir, el que tiene el sentido contrario.

Definición 4. El vector opuesto es un vector con el mismo módulo, la misma dirección, y sentido opuesto.

Nota 6. Igual que para los números, para el vector opuesto a $\vec{u}$ escribimos $-\vec{u}$.

Y en coordenadas, cambiar el signo de un vector es equivalente a cambiar el signo de sus coordenadas:

Fórmula 3 (Vector opuesto). $-\overrightarrow{(x,y)} = \overrightarrow{(-x,-y)}$

Ej. 15 — Calcula y dibuja los siguientes vectores:

a) $-\overrightarrow{(2,3)}$
b) $-\overrightarrow{(1,5)}$
c) $-\overrightarrow{(-2,4)}$
d) $-\overrightarrow{(-6,-3)}$
e) $\overrightarrow{(3,4)} - \overrightarrow{(2,2)}$
f) $\overrightarrow{(-2,-5)} - \overrightarrow{(1,3)}$
g) $\overrightarrow{(1,2)} - \overrightarrow{(-2,-3)}$
h) $\overrightarrow{(3,3)} - \overrightarrow{(3,3)}$

Definición 5. El vector $\overrightarrow{(0,0)}$ se conoce como el **vector nulo**.

Nota 7. Geométricamente, el vector nulo no es un segmento, sino un punto, y por tanto no tiene orientación: $-\overrightarrow{(0,0)} = \overrightarrow{(0,0)}$. Pero como técnicamente es un vector libre, se puede mover, así que tampoco es un punto del plano. Lo consideraremos un caso especial de vector, igual que el número cero es un poco especial, porque no es positivo ni negativo.

Multiplicación de un vector por un escalar

Cuando hablamos de multiplicar números entre sí, ¿qué queremos decir? Estamos ya tan acostumbrados, que ni nos lo planteamos. Siete por cinco es treinta y cinco, porque nos sabemos la tabla del siete. Pero si haces memoria, te acordarás de qué quería decir originalmente multiplicar: algo por dos es sumar ese algo dos veces, algo por tres es sumarlo tres veces, etc. Pues con vectores igual, multiplicar un vector por un número (o escalar) es sumarlo tantas veces como diga ese número: $3 \cdot \vec{v} = \vec{v} + \vec{v} + \vec{v}$. ¿Y si el número es negativo? Entonces le cambiamos el sentido, y lo sumamos tantas veces como haga falta.

Ahora, si convertimos esto en coordenadas, ¿qué quiere decir?

$$\begin{aligned} 3 \cdot \overrightarrow{(x,y)} &= \overrightarrow{(x,y)} + \overrightarrow{(x,y)} + \overrightarrow{(x,y)} \\ &= \overrightarrow{(x+x+x, y+y+y)} \\ &= \overrightarrow{(3x, 3y)} \end{aligned}$$

Efectivamente, como te puedes imaginar, esto se cumple siempre, por lo que llegamos a la siguiente conclusión: el producto de un número por un vector es otro vector con las coordenadas del primero multiplicadas cada una por el número:

Fórmula 4 (Multiplicación de un número por un vector).
$$k \cdot \overrightarrow{(x,y)} = \overrightarrow{(k \cdot x, k \cdot y)}$$

Ej. 16 — Calcula los siguientes vectores:

a) $3 \cdot \overrightarrow{(1,2)}$

b) $2 \cdot \overrightarrow{(3,-4)}$

c) $-3 \cdot \overrightarrow{(5,-1)}$

d) $\sqrt{3} \cdot \overrightarrow{(\sqrt{3},2)}$

Solución (Ej. 16) —

a) $\overrightarrow{(3,6)}$

b) $\overrightarrow{(6,-8)}$

c) $\overrightarrow{(-15,3)}$

d) $\overrightarrow{(3,2\sqrt{3})}$

Ej. 17 — Dados los siguientes vectores: $\vec{a} = \overrightarrow{(3,2)}$, $\vec{b} = \overrightarrow{(-1,5)}$, $\vec{c} = \overrightarrow{(3,\sqrt{3})}$ y $\vec{d} = \overrightarrow{(-\frac{1}{2},-2)}$, calcula:

a) $\vec{a} + 2\vec{b}$

b) $\sqrt{3}\vec{c} + 2\vec{d}$

c) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

d) $\sqrt{3}\vec{d} - \vec{c}$

e) $\vec{b} - \vec{a} - 2\vec{d}$

3.4. Vectores fijos

Hasta ahora cuando hemos hablado de vectores, eran el equivalente matemático de “dos metros a la derecha”, “diez centímetros de frente”, etc. Pero, ¿cuál es el equivalente de “dos metros a la derecha **de la mesa del profesor**” o “desde Madrid a Barcelona”?

¿Es lo mismo “dos metros a la derecha” que “dos metros a la derecha **desde la mesa del profesor**”? En cierto modo, sí. Ambos se pueden representar matemáticamente como vectores, con el mismo módulo (dos metros), dirección y sentido (hacia la derecha). Pero hay una pequeña diferencia. En el primer caso, no decimos de dónde partimos. Es un **vector libre**, que podemos mover en el plano. En el segundo caso, estamos eligiendo una posición fija del plano para el vector, por lo que es un **vector fijo**.

Definición 6. Un vector fijo es el segmento de recta orientado que se haya entre dos puntos, el origen y el destino.

Nota 8. Un vector fijo equivale a un vector libre, pero un vector libre equivale a infinitos vectores fijos, que resultan de elegir para el vector un origen y destino.

Así, el vector “Desde Madrid a Barcelona” tiene aproximadamente módulo 500km, dirección Noreste-Suroeste y sentido Noreste, y además, al ser un vector fijo, origen Madrid y destino Barcelona. El vector “Barcelona-Madrid” tiene el mismo módulo y dirección, pero sentido opuesto.

Nota 9. En el plano cartesiano, escribiremos $\overrightarrow{AB}$ al vector con origen en el punto A y destino en B.

Ej. 18 — Dibuja los siguientes vectores:

a) $\vec{u} = \overrightarrow{(1,3)}$ con origen en el punto $(-1,-1)$.

b) $\vec{v} = \overrightarrow{(-2,-2)}$ con destino en el punto $(0,0)$.

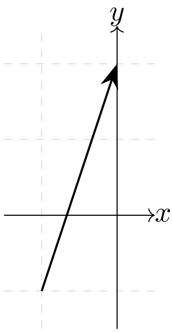
c) ¿Cuál es el destino de $\vec{u}$, y el origen de $\vec{v}$?

d) $\vec{w}$ con origen en $(2,1)$ y destino $(3,3)$.

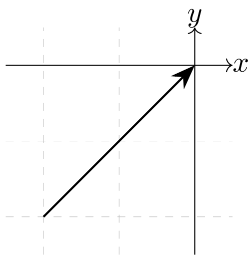
e) ¿Cuáles son las coordenadas de $\vec{w}$?

Solución (Ej. 18) —

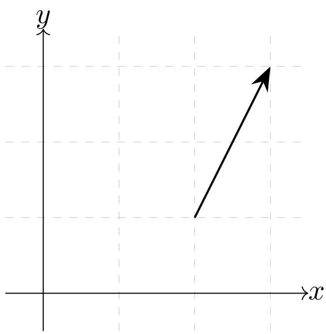
a)



b)



d)



c) $\boxed{(0,2)}$, $\boxed{(-2,2)}$

e) $\boxed{\overrightarrow{(1,2)}}$

Para resolver el ejercicio anterior, podemos hacer la representación gráfica, y a partir de ahí calcular las coordenadas. Como la coordenada X es cuánto avanza el vector paralelo al eje X, para ir del primer punto al segundo necesitamos restar sus coordenadas X, y en Y pasa lo mismo.

Fórmula 5 (Coordenadas vector entre dos puntos). *Dados $A = (a_x, a_y)$ y $B = (b_x, b_y)$, el vector que los une $\overrightarrow{AB}$ tiene como coordenadas $\overrightarrow{(b_x - a_x, b_y - a_y)}$.*

Ej. 19 — Dados los puntos $A = (3, 4)$, $B = (-1, 2)$, $C = (-2, -3)$ y $D = (5, -2)$, calcula las coordenadas de los vectores que los unen dos a dos.

Solución (Ej. 19) — $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(-4, -2)}$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{(-5, -7)}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{(2, -6)}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{(-1, -5)}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{(6, -4)}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{(7, 1)}$. El resto de los vectores son opuestos a alguno de los que ya hemos dado.

Acordándonos de la definición de vector opuesto, podemos ver que el vectores fijo que empieza en A y acaba en B es opuesto al del sentido contrario, que empieza en B y acaba en A:

Nota 10. $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

Ej. 20 — Calcula la distancia entre A y B del ejercicio 19.

Solución (Ej. 20) —

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \boxed{2\sqrt{5}}$$

Fórmula 6 (Distancia entre dos puntos). *La distancia entre los puntos A y B es el módulo del vector que los une, $\overrightarrow{AB}$:*

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{(b_x - a_x, b_y - a_y)}| = \sqrt{(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2}$$

Ej. 21 — Calcula la distancia entre todos los puntos del ejercicio 19.

Solución (Ej. 21) — Como ya tenemos calculados los vectores fijos que los unen, las distancias serán iguales a sus módulos: $d(A,C) = \sqrt{74}$, $d(A,D) = 2\sqrt{10}$, $d(B,C) = \sqrt{26}$, $d(B,D) = 2\sqrt{13}$, $d(C,D) = 5\sqrt{2}$.

3.5. Producto escalar

Ahora que ya hemos visto cómo multiplicar un número por un vector, ¿qué más podemos hacer? Una idea es multiplicar vectores entre sí. Pero en este caso, no es tan claro qué es lo que nos tiene que salir. Las sumas y restas pudimos entenderlas geométricamente, y en el caso de multiplicar vectores por números, vimos que se podía hacer una definición intuitiva del producto, como repetición de la suma. Pero si queremos multiplicar vector con vector, no tenemos una interpretación tan inmediata, así que los matemáticos han buscado distintas maneras de hacerlo.

Recordando las coordenadas, y cómo sumar vectores era equivalente a sumar sus coordenadas, podríamos decir: pues para multiplicar vectores, multiplicamos sus coordenadas. Esto se puede hacer, pero no es muy útil en general. En cambio, lo que sí es muy útil es si, después de multiplicar las coordenadas, las sumamos entre sí. Esta operación nos da como resultado **un número, no un vector**, o como se le suele llamar más técnicamente, un escalar, y por eso se la conoce como **producto escalar**.

Fórmula 7 (Producto escalar: coordenadas).

$$\overrightarrow{(u_x, u_y)} \cdot \overrightarrow{(v_x, v_y)} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$$

Nota 11. Escribimos el producto escalar con un punto a media altura, como a veces al multiplicar números, pero en el caso de vectores no lo solemos omitir: $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Ej. 22 — Calcula los siguientes productos escalares:

a) $\overrightarrow{(3,2)} \cdot \overrightarrow{(1,4)}$

b) $\overrightarrow{(-1,5)} \cdot \overrightarrow{(2,2)}$

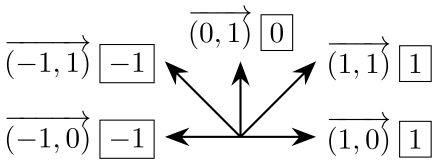
Ahora, todo esto está muy bien, pero antes hemos dicho que el producto escalar es *útil*. ¿Qué queremos decir con esto? Con un poco de investigación, podemos llegar a una intuición de las propiedades del producto escalar.

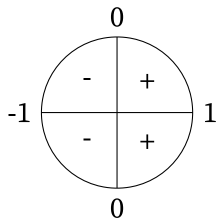
Para empezar, probemos los siguientes productos:

- $\overrightarrow{(1,0)} \cdot \overrightarrow{(1,0)} = 1$
- $\overrightarrow{(2,0)} \cdot \overrightarrow{(3,0)} = 6$
- $\overrightarrow{(4,0)} \cdot \overrightarrow{(2,0)} = 8$
- $\overrightarrow{(2,3)} \cdot \overrightarrow{(4,6)} = 26$

- $\overrightarrow{(-1,0)} \cdot \overrightarrow{(2,0)} = -2$
- $\overrightarrow{(-2,-1)} \cdot \overrightarrow{(-4,-2)} = 10$

Parece que cuanto mayor es el módulo de los vectores, mayor es el valor absoluto del producto escalar (el signo cambia). Esto en matemáticas lo escribimos como $\vec{u} \cdot \vec{v} \propto |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$. Pero he estado haciendo un poco de trampa, y he elegido todos los vectores paralelos. ¿Qué pasa si entre ellos forman un ángulo? Investiguemos más: comprobemos el producto escalar (recuadrado) de los siguientes vectores con el $\overrightarrow{(1,0)}$:





A la derecha hemos dibujado la circunferencia unidad, y marcado el signo del producto escalar para los vectores en los distintos cuadrantes. ¿Te recuerda esto a algo? ¡Efectivamente! El producto escalar tiene relación con el coseno del ángulo, o como escribíamos antes, $\vec{u} \cdot \vec{v} \propto \cos\alpha$ (α es el ángulo que forman los vectores, si en vez de el $\overrightarrow{(1,0)}$ hubíeramos usado otro vector, la circunferencia de la derecha nos habría quedado torcida).

Ya vimos antes que el producto escalar es proporcional a los módulos, y ahora hemos visto que también al coseno del ángulo. Pues resulta que es exactamente eso:

Fórmula 8 (Producto escalar: módulo y ángulo). $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \alpha$

Pero y esto, ¿para qué nos sirve? Pues, ¿te acuerdas, al principio del tema, que dijimos que los vectores tenían módulo, dirección y sentido? Cuando usamos sus coordenadas, es más difícil ver estas propiedades, especialmente la dirección, pero son muy importantes y no podemos olvidarnos de ellas. Si te pregunto, por ejemplo, cuál es el ángulo entre dos vectores, ¿cómo lo harías? Una opción sería dibujarlos, y usar un transportador de ángulos. Otra opción sería hacer un poco de trigonometría. Pero gracias a las dos fórmulas anteriores, podemos calcular el ángulo mucho más fácilmente:

Fórmula 9 (Ángulo entre dos vectores).

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Ej. 23 — ¿Qué ángulo forman $\vec{a} = \overrightarrow{(3,0)}$ y $\vec{b} = \overrightarrow{(2,2)}$?

Solución (Ej. 23) —

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{(3,0)} \cdot \overrightarrow{(2,2)}}{|\overrightarrow{(3,0)}||\overrightarrow{(2,2)}|} = \frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot 0}{\sqrt{3^2+0^2} \cdot \sqrt{2^2+2^2}}$$
$$= \frac{6}{3\sqrt{8}} = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Si nos acordamos del tema de trigonometría, ¿qué ángulo tenía como coseno $\frac{\sqrt{2}}{2}$? La solución es $\alpha = \boxed{45^\circ}$.

Pero y ¿qué pasa si el coseno que nos sale no es uno que nos sepamos? En ese caso, existe la función **arco coseno** (en las calculadoras puedes encontrarla como $\cos^{-1}$ o $\arccos$), que es la función inversa del coseno. Es decir, si le damos un número, nos dice qué ángulo tiene como coseno ese ángulo. Date cuenta de que hay más de uno, pero la calculadora normalmente nos da el más pequeño, que es justo el que queremos para los vectores.

Ej. 24 — Calcula los ángulos entre los siguientes vectores:

a) $\overrightarrow{(4,0)}, \overrightarrow{(2,2)}$

b) $\overrightarrow{(4,0)}, \overrightarrow{(2.4)}$

c) $\overrightarrow{(2,2)}, \overrightarrow{(2,4)}$

d) $\overrightarrow{(4,0)}, \overrightarrow{(-1,-2)}$

e) $\overrightarrow{(4,0)}, \overrightarrow{(-3,-3)}$

Ej. 25 — Calcula un vector $\vec{v}$ perpendicular a $\overrightarrow{(2,1)}$.

Solución (Ej. 25) — ¿Cómo lo hacemos? Perpendicular quiere decir que forman ángulo recto, 90°. Si $\alpha = 90^\circ$, entonces $\cos\alpha = 0$. Es decir, $0 = \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,1)} = 2x + y$. Esta ecuación tiene dos incógnitas, por lo que es indeterminada. Elegimos un valor para x, por ejemplo 1, y por tanto $y = -2$, es decir una posible solución es $\boxed{\overrightarrow{(1,-2)}}$.

Nota 12. Dos vectores son perpendiculares entre sí si su producto escalar es 0, es decir: $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Nota 13. Un truco para conseguir un vector perpendicular a uno dado es intercambiar las coordenadas, y cambiarle el signo a una de ellas: $\overrightarrow{(x,y)} \perp \overrightarrow{(y,-x)}$.

Ej. 26 — Determina cuáles de los siguientes vectores son perpendiculares entre sí: $\vec{a} = \overrightarrow{(2,3)}$, $\vec{b} = \overrightarrow{(1,-2)}$, $\vec{c} = \overrightarrow{(0,2)}$, $\vec{d} = \overrightarrow{(4,2)}$, $\vec{e} = \overrightarrow{(-1,0)}$.

Ej. 27 — Halla un vector $\vec{v}$ perpendicular a $\vec{u} = \overrightarrow{(3,1)}$, y tal que $|\vec{v}| = \sqrt{40}$.

Solución (Ej. 27) —
Lo primero de todo, usando el truco, encontramos un vector perpendicular: $\overrightarrow{(-1,3)}$. ¿Cuál es el módulo de este vector? $|\overrightarrow{(-1,3)}| = \sqrt{1+3^2} = \sqrt{10}$. No nos vale, queremos que sea más grande. ¿Cuánto más? Pues queremos que sea de módulo $\sqrt{40}$, y tiene $\sqrt{10}$, así que habrá que multiplicarlo por $\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{10}} = \sqrt{4} = 2$. Por tanto, la solución es $2 \cdot \overrightarrow{(-1,3)} = \boxed{\overrightarrow{(-2,6)} = \vec{v}}$.

3.6. Actividades con GeoGebra

Los ejercicios de los apuntes, que pretenden interrumpir el monólogo y dar participación a los alumnos, sirven para introducir pausas en el discurso didáctico, y asentar los conocimientos mediante la práctica y la ejemplificación. Por ello, vienen dados en el fluir del texto, acompañando y entrelazados con la explicación.

Sin embargo, la pizarra y el cuaderno se nos pueden quedar cortos como herramientas visuales. Con GeoGebra, los alumnos pueden descubrir por sí mismos las relaciones importantes, trabajar de manera eficiente con los conceptos, todo ello en un entorno cómodo y dinámico como es esta aplicación.

Se plantean a continuación, por tanto, una serie de actividades complementarias con GeoGebra para consolidar el conocimiento de las secciones anteriores mediante el trabajo activo y la visualización. Puesto que no todas las aulas son iguales, se disponen estas actividades en una sección aparte para incorporarlas con la cronología que mejor se adapte a nuestro contexto didáctico:

- Utilizar en el aula, después de cada exposición y antes de los ejercicios, la actividad correspondiente a lo visto.
- Utilizar sesiones en el aula de informática para realizar las actividades correspondientes al temario ya cubierto.
- Utilizar como plantilla o enunciado para la tarea para casa, y que los alumnos a su ritmo y en sus propios sistemas realicen la exploración.

Intuición de vector

Abre la calculadora gráfica de GeoGebra, e introduce `u = (3, 4)`. GeoGebra crea un vector libre con estas coordenadas. Para dibujarlo, como tiene que ponerlo en algún lado, elige como origen el punto `(0, 0)`, pero recuerda que los vectores libres pueden dibujarse en cualquier punto del plano. Para comprobarlo, haz click derecho en el círculo que hay a la izquierda de la definición de u, o sobre el dibujo del vector. En "configuración, posición", elige como origen el punto $(1, 1)$. Tiene que quedar como en la figura 3.3.

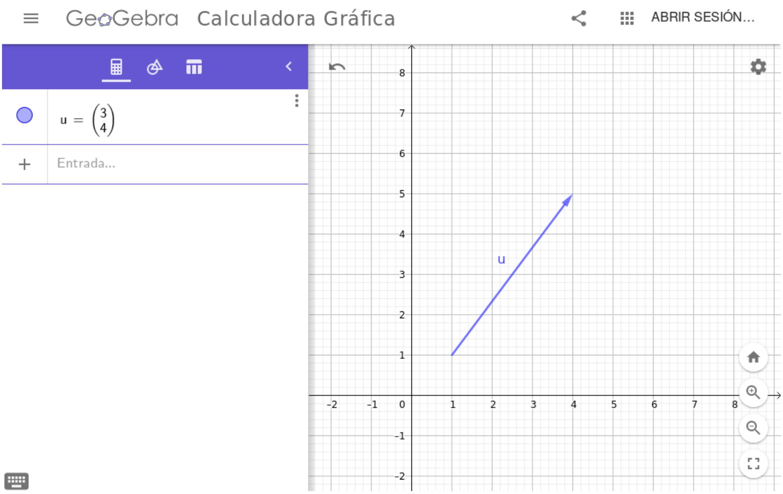


Figura 3.3: Vector libre $\vec{u} = \overrightarrow{(3,4)}$

Como puedes ver en la calculadora, GeoGebra escribe los vectores en vertical, es decir: $\binom{3}{4}$. Esto es muy habitual en matemáticas, por cuestiones que verás en cursos posteriores, pero a nosotros ahora mismo nos da igual, y como has visto también entiende si los escribimos en horizontal.

Practicar: Crea un vector $\vec{v}$ de coordenadas $(2, 1)$. Crea ahora otro vector $\vec{w}$ de coordenadas $(2, -4)$. ¿Qué ángulo forman $\vec{v}$ y $\vec{w}$?

Explorar: En el botón a la derecha del símbolo de calculadora, tienes una opción para introducir gráficamente objetos en el plano. Busca la opción de "Vector", y dibuja uno.

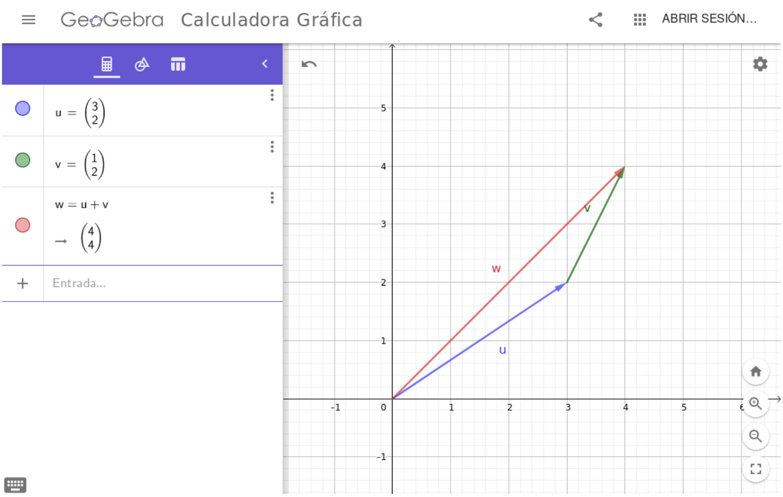


Figura 3.4: Suma geométrica de dos vectores, $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

¿Qué otros objetos aparecen? ¿Qué crees que representan? Más adelante, veremos el concepto de vector fijo.

Operaciones con vectores

En la calculadora gráfica de GeoGebra, introduce dos vectores: `u = (3, 2)` y `v = (1,2)`. Ahora queremos hacer la suma. ¿Qué dijimos que era la suma? Intuitivamente, era seguir primero un vector, y después el otro. Para representar esto en GeoGebra, configuremos como el origen de `v` el final de `u` (es decir, en "Configuración, Posición" de `v`, ponemos `(3,2)`).

La suma `u + v`, por tanto, tiene que llevarnos al final de `v`. Crea un vector `w = (4, 4)`, la suma de las coordenadas de `u` y `v`, y comprueba que coincide, como en la figura 3.4.

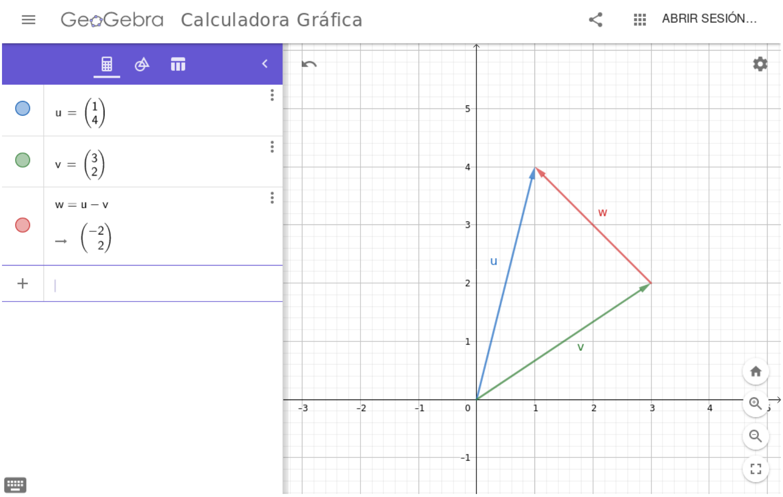


Figura 3.5: Resta geométrica de vectores, $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$

Además, también podemos escribir directamente en GeoGebra `w = u+v`, y comprobar el resultado.

Explorar: Cambia las coordenadas de `u` y `v`, y comprueba la suma. Prueba ahora a realizar la misma secuencia de antes, pero poniendo primero `v`, y el origen de `u` partiendo de `v`. ¿El resultado es el mismo? Esto es porque la suma de vectores es conmutativa, es decir, el orden de los sumandos no altera el resultado. Comprueba visualmente por qué esto tiene sentido.

Descubrir: Empezando de cero, crea los vectores `u = (1, 4)` y `v = (3, 2)`. ¿Cuál es la resta de u y v?

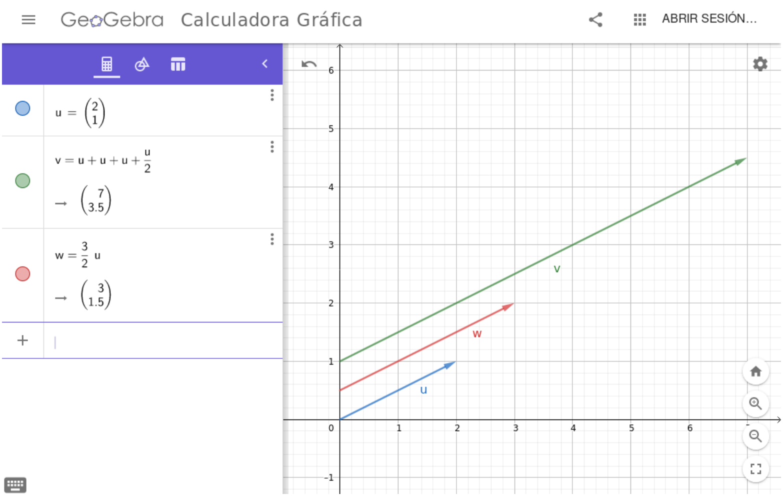


Figura 3.6: Multiplicación de un vector por un escalar, $\vec{v} = 3\vec{u}$, $\vec{w} = \frac{3}{2}\vec{u}$.

Puedes introducir `u - v` en la calculadora para obtener el resultado, pero ¿qué sentido geométrico tiene esto? Recuerda la teoría, y coloca los vectores de manera que la resta tenga significado geométrico. Hay varias opciones, y puedes ver una de ellas en la figura 3.5, en la que mostramos que $\vec{u} - \vec{v}$ es el vector que nos lleva de $\vec{v}$ hasta $\vec{u}$. Esto puedes comprobarlo también algebraicamente:

$$\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} \implies \vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$$

¿Qué dijimos que representaba la multiplicación de un vector por un número? Igual que en los números, significa una suma repetida, es decir, multiplicar por 3 significa sumar 3 veces el vector. Pero también podemos dividir, $\frac{1}{2}$ de un

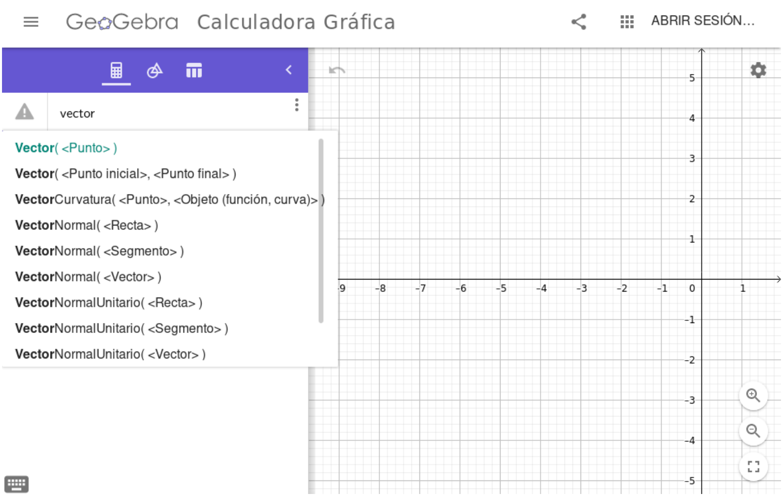


Figura 3.7: Distintas formas de definir un vector en GeoGebra.

vector es la mitad, que podemos calcular tanto geométricamente como algebraicamente.

Practicar: Calcula tanto geométricamente como algebraicamente el producto del vector `u = (2, 1)` por 3, y luego por $\frac{3}{2}$. Puedes ver la solución en la figura 3.6.

Vectores fijos y distancia

Hasta ahora, en GeoGebra introducíamos los vectores mediante coordenadas, pero también existe otra forma de definirlos. Si escribes en la línea de comandos la palabra "Vector", GeoGebra te despliega una serie de posibilidades que se corresponden a distintas maneras que entiende para definir un vector (figura 3.7).

La primera, `Vector(<Punto>)` traza un vector desde el origen hasta el punto que elijamos, y la segunda (`Vector(<Punto>, <Punto>)`) entre dos puntos que hayamos definido. Las demás son más avanzadas, pero si en tus ratos libres las exploras, ¡seguro que descubres lo que significan!

Practicar: Define dos puntos `A = (1, 3)` y `B = (4, 2)`, y el vector fijo `u = Vector(A, B)`. Prueba a mover los puntos con el ratón, y comprueba cómo cambian las coordenadas de `u`.

Como ves, si lo escribes exactamente así, GeoGebra nos entiende perfectamente. ¿Pero qué pasa si escribimos `a` y `b` en minúsculas? Entonces, GeoGebra piensa que nos referimos a un vector. Esto se llama convención, y es habitual en matemáticas para ayudarnos a entendernos unos a otros. En los apuntes, hemos usado flechas sobre los vectores, pero en el ordenador esto no es tan fácil de escribir, así que GeoGebra decide usar la convención de que las mayúsculas representan puntos y las minúsculas vectores.

Practicar: Calcula la distancia entre los puntos `A` y `B`.

Recuerda la fórmula 6, y el concepto de módulo, que mide la longitud de un vector. ¿Cómo escribíamos el módulo? Usando barras verticales: $|\vec{u}|$. Pues en GeoGebra igual, busca en tu teclado la barra vertical (en muchos teclados, tienes que mantener pulsado "Alt Gr" y "1") y escribe exactamente eso: `|u|`. GeoGebra calcula el módulo del vector, y eso nos dice la distancia entre los puntos `A` y `B`, como puedes ver en la figura 3.8. Por supuesto, GeoGebra también tiene la funcionalidad

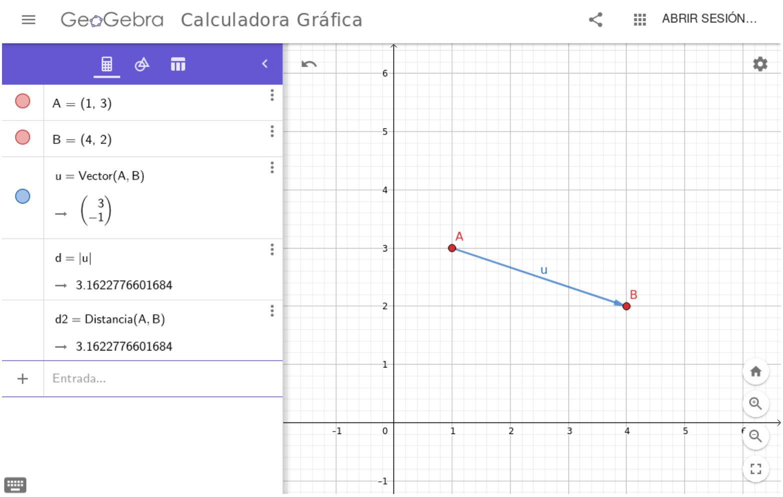


Figura 3.8: Vector fijo y distancia entre puntos del plano.

para calcular la distancia directamente, como era de esperar, escribiendo `Distancia(A, B)`.

Descubrir: Prueba a mover los puntos `A` y `B` con el ratón, y comprobar que la distancia entre ellos es lo que esperas.

Producto escalar y ángulo

Ahora que sabemos utilizar vectores fijos, para poder mover cómodamente los vectores y explorar lo que viene a continuación, crearemos la siguiente configuración: puntos `A`, `B` y `C`, y vectores `u = Vector(A, B)` y `v = Vector(A, C)`. Dónde pongas los puntos no importa, pero prueba distintas opciones hasta que quede claro.

Para calcular el ángulo, entre los vectores `u` y `v`, podemos pedírselo directamente a GeoGebra, que además nos dibuja-

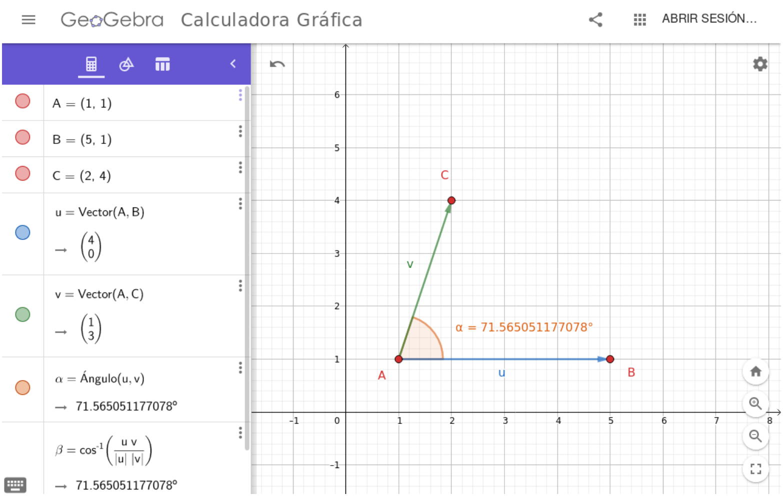


Figura 3.9: Ángulo entre vectores.

rá también el ángulo en el papel. Para ello, usamos la función `Ángulo(u, v)`. ¡No te olvides de la tilde! Prueba a mover los puntos `A`, `B` y `C` y comprueba el ángulo.

Pero si te acuerdas de la fórmula 9, también teníamos una manera algebraica de calcular el ángulo. Introduce esa fórmula en GeoGebra como sigue: `arccos ( ( u * v ) / ( | u | * | v | ) )` (ojo a los paréntesis), y comprueba que el valor es el mismo que nos calcula GeoGebra. Puedes ver la configuración entera en la figura 3.9.

En los apuntes, intentamos descubrir la fórmula del producto escalar explorando sus propiedades. Ahora podemos ver una definición geométrica que es difícil de interpretar sin una herramienta como GeoGebra.

Partiendo de la configuración anterior (puedes borrar los ángulos para mayor claridad), escribe en la calculadora `P =`

`A + (u/|u|) * ( (u*v) / (|u|) )`. Aunque parece complicada, con esta fórmula queremos calcular una cosa interesante. Cuando decimos `A + (u/|u|)`, simplemente queremos decir "en la dirección de $\vec{u}$". ¿Por qué? Empezamos en el punto `A`, que es el origen, y nos movemos en la dirección de $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$, dividiendo entre el módulo de $\vec{u}$ para que de igual la longitud de este vector.

Lo que viene a continuación es el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, otra vez dividido para que de igual el tamaño de $\vec{u}$. ¿Qué observas en el dibujo? ¿Dónde está el punto `P`?

Explorar: Mueve los puntos `A`, `B` y `C` y observa lo que ocurre con `P`. Puedes ver ejemplos de lo que ocurre en las figura 3.10.

Como puedes ver, `P` siempre está en lo que llamamos la "proyección ortogonal" de `v` sobre `u`. Esto crea un triángulo rectángulo, y por eso podemos calcular el ángulo entre `u` y `v` utilizando trigonometría y el producto escalar.

Proyecto: Crea una visualización de GeoGebra en la que las relaciones anteriores del producto escalar, el triángulo rectángulo y el ángulo entre los vectores queden claras. ¡Esmérate en la visualización, para que quede clara y luego puedas enseñársela a tus compañeros!

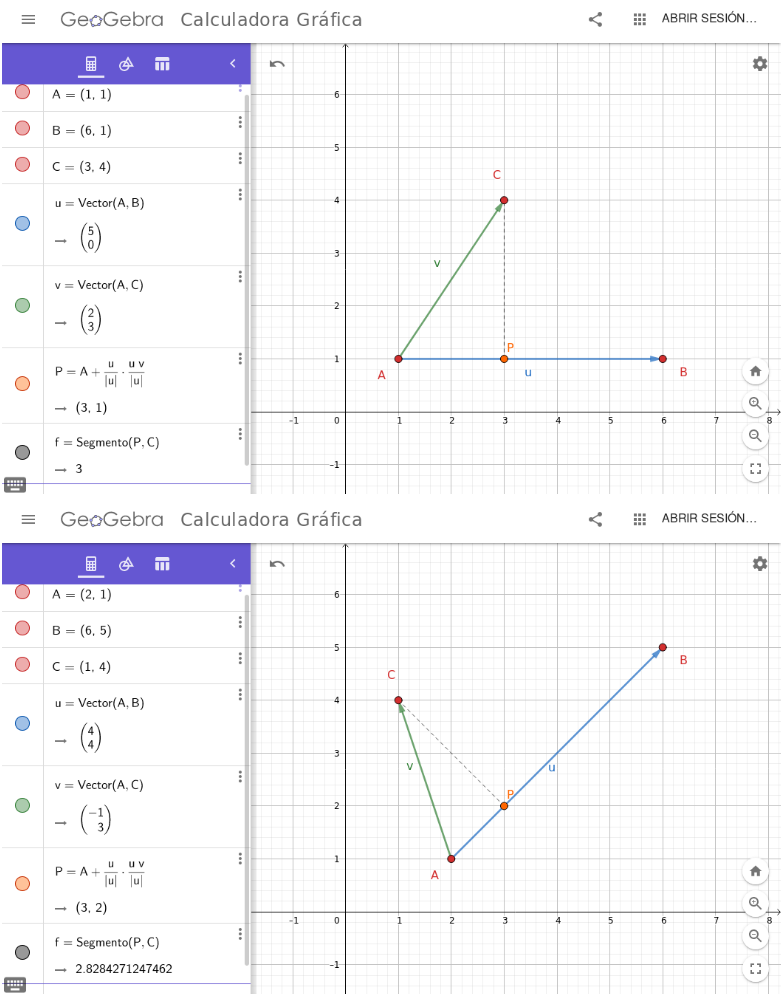


Figura 3.10: Proyección ortogonal del vector $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

4 Análisis e interpretación de los resultados

Tras la realización de los apuntes, es necesario echar la vista atrás para evaluar cómo han resultado. Hay dos maneras principales de hacer esto: de forma teórica y sobre la práctica. Idealmente, toda la evaluación sería práctica y experimental, comprobando sobre el terreno que el trabajo realizado ha funcionado. Por limitaciones del contexto, sin embargo, es imposible realizar esto, y queda como trabajo futuro.

Si bien los apuntes desarrollados se han basado en la experiencia durante el prácticum, gran parte de ellos no estaban preparados o no de la manera definitiva durante la impartición de la unidad. Esto hace que no puedan ser evaluados de manera experimental, al no tener datos. Por ejemplo, la adición de las actividades con GeoGebra es una idea de la tutora de este trabajo, con lo cual no ha habido alumnos (ni, por otro lado, tiempo) para evaluar su efectividad didáctica. Por tanto, dejamos gran parte del análisis como trabajo futuro, cuando estos apuntes sean implementados realmente.

Sin embargo, sí que hay algunas conclusiones que se pueden sacar en base a la impartición de la unidad didáctica con los apuntes preliminares, y con reflexión individual tras la elaboración de los apuntes finales.

Una de las carencias más evidentes de este trabajo y los apuntes es la evaluación. Tanto durante la impartición de la unidad didáctica como durante el desarrollo del trabajo, no se prestó suficiente atención a los mecanismos evaluadores, centrándome en la impartición de contenidos y desarrollo de competencias. Los ejercicios se hacían, pero no llevaba una cuenta efectiva de qué alumnos o con qué resultado más allá de mi evaluación subjetiva. Este defecto fue evidente al final de la unidad, cuando me hallé con pocos mecanismos para decidir si el trabajo había sido efectivo. Aún ahora, es también evidente la falta de datos para compilar y analizar de manera objetiva. El uso de un examen para varios temas como única evaluación numérica claramente es insuficiente, pero por otro lado viene dado por el contexto real de la unidad didáctica, que no está aislada de las demás, y restringida a la programación cronológica del centro y profesor tutor.

Por otro lado, trascurridas las dos semanas asignadas al desarrollo de este tema, una impresión muy clara se había formado en mí sobre el aprendizaje de los alumnos. Podemos dividir la unidad didáctica en dos partes. La unidad didáctica tiene un comienzo muy sencillo y mecánico, el uso y operación con vectores, pero un final (producto escalar, ángulo entre vectores) que es más complejo y requiere un cierto razonamiento.

Los escolares por su parte presentan dos variables principales que afectaban a su desempeño. La primera era la competencia matemática pre-existente. Los alumnos con esta competencia ya desarrollada no tuvieron problemas con la unidad, y su aprendizaje fue efectivo y completo.

Dentro de los alumnos con menor capacidad matemática, tenemos la segunda variable, de la motivación. Muchos de los alumnos tenían menor competencia, pero alta motivación. Este grupo tuvo pequeñas dificultades con la primera parte de la unidad, en el sentido de que no tienen desarrollada aún la capacidad algebraica necesaria para generalizar el lenguaje matemático, por lo que entendían la resolución de los ejercicios, pero eran incapaces de resolver uno nuevo, aunque fuera muy parecido.

Afortunadamente, este grupo de estudiantes logró superar esta dificultad, mediante la práctica de ejercicios variados pero que incidían en el significado de las coordenadas, lo cual si bien quizá no creó un entendimiento algebraico, sí creó una intuición suficiente que creo que generalizará también en el futuro a las tres dimensiones y otros cálculos vectoriales y algebraicos.

Sin embargo, la segunda parte de la unidad didáctica, especialmente el cálculo del ángulo entre vectores, requiere de una visualización geométrica y capacidad de abstracción que no llegó a completarse. Quizá habrían sido necesarias más sesiones, pero muchos estudiantes se frustraban al no entender los razonamientos. Intenté explicarlo de distintas maneras, pero no fue suficiente para avanzar más allá de la competencia mínima requerida, que es el ser capaz de aplicar la fórmula en el problema que se nos requiere, y que afortunadamente sí que fue alcanzada por la mayoría de estudiantes con suficiente motivación.

A este respecto, el uso de GeoGebra podría haber sido una herramienta muy valiosa, y queda para el futuro comprobar si el tipo de alumnos que tienen problemas para visualizar los conceptos en abstracto serían capaces de entenderlos mejor en concreto, viendo sobre “el papel” (la pantalla) los desarrollos reales.

De hecho, durante el desarrollo del prácticum realicé en clase una actividad práctica, en la que los alumnos tenían que calcular unos vectores, definidos con las distintas operaciones y conceptos que habían estudiado, y dibujarlos en el plano. Si conseguían dibujar todos correctamente, el resultado era una figura (una estrella con ojos) que había calculado yo previamente.

La preparación de esta actividad requirió mucho trabajo por mi parte, y luego no hubo tiempo suficiente en el aula para que ningún grupo la acabara. Sin embargo, fue una actividad más lúdica, lo que motivó mucho a los alumnos, que al final de la clase pidieron repetir (no se pudo por falta de tiempo) y quisieron ver la solución. Este tipo de actividades con GeoGebra serían más fáciles de preparar, y más agradecidas tanto para el profesor como los alumnos al permitir cambiar cosas y corregir errores más cómodamente que con lápiz y papel. Además, la potencia de GeoGebra permitiría poner ejercicios más complicados con mayor potencial didáctico.

5 Conclusiones y líneas futuras de desarrollo

Tras el esfuerzo realizado, y a pesar de la falta de tiempo y de evaluación correcta de los resultados, me siento optimista respecto a mi trabajo. Cada vez que había que retomar algún asunto, o corregir alguna sección, me enfrascaba durante horas en la lectura de materiales relacionados, y luego en la elaboración de la tarea concreta hasta que conseguía exactamente el resultado que quería.

Si a uno le gusta la docencia, la elaboración de recursos didácticos es una parte de ella muy agradecida. Se tiene la opción de desarrollar las ideas, sin la esclavitud del currículo y el calendario, y es una actividad creativa en la que utilizar la experiencia y habilidades adquiridas para crear un objeto material, un resultado tangible que utilizar y distribuir.

Sin embargo, esa “esclavitud” del contexto está ahí por una razón, y es que la actividad docente, sin alumnos, tiene poco sentido. Es por esto que, tras la esperemos exitosa compleción de este máster, y en el ejercicio de la práctica docente, espero poder combinar el gusto de elaborar los recursos con la actividad real, que además de darles sentido me permitan evaluarlos y analizarlos para mejorar, uno de los principales trabajos futuros que quedan pendientes en este documento.

Todo el tiempo invertido en refrescar la matemática, en repensarla para alumnos de 4° de la ESO, en aprender Latex y GeoGebra, van más allá del resultado plasmado, siendo conocimientos que quedan en mi mente para el futuro, y que generan ideas y líneas futuras de desarrollo.

Por un lado, GeoGebra. Tengo que agradecer a mi tutora la idea de utilizar esta herramienta, pues aunque la conocía, nunca me había parado a realmente entender su uso y posibilidades docentes. Una línea que esta aplicación posibilita sería utilizarla como motivador y actividad preliminar, que guíe la teoría, en lugar de a posteriori para consolidar y practicar.

Otra línea sería utilizar esta misma metodología para elaborar apuntes para más unidades, que tengan también relación geométrica y algebraica. Así, los alumnos se familiarizarían con el uso del método inductivo para el desarrollo de los contenidos, lo que afianzaría esta manera de trabajar y entender las matemáticas.

Por supuesto, mejorar la evaluación, y hacerlo de una manera que permita comprobar experimentalmente que las intuiciones y competencias que queremos crear están siendo adquiridas, para iterar sobre el concepto y mejorar los apuntes con estos datos.

Finalmente, hay un comentario que siento necesario hacer. La preparación de la unidad didáctica original llevó bastante tiempo, siendo parte importante de la asignatura del prácticum. La elaboración posterior de los apuntes, y su forma final en este trabajo de fin de máster, ha llevado otra cantidad de tiempo equiparable a la anterior. El tiempo y trabajo acumulados han sido, al final, mucho mayores que el tiempo dedicado en el aula al desarrollo de la unidad. Pero como me recuerda mi tutora, esta es una realidad fundamental de la labor docente, y este trabajo me ha servido para realmente entender esta proporción y por qué es así.

La experiencia nos dice, y así nos lo han enseñado en el máster, que efectivamente preparar los recursos y planificar la docencia llevan un tiempo poco aparente si sólo se tiene en cuenta el tiempo en el aula. Uno no se da cuenta realmente de cuánto hasta que lo experimenta por sí mismo, y esto ha sido una de los grandes conclusiones para mí realizando este trabajo.

Pero por otro lado, según pase el tiempo y la experiencia se acumule, tanto ésta como el material didáctico se sumarán, convirtiendo este tipo de trabajo en una inversión a largo plazo más que una actividad puntual. Como tal, espero poder practicar los resultados, tanto concretos como de aprendizaje, en mi actividad profesional futura, y con un poco de suerte que también sean útiles para otros docentes que hallen en ellos ideas o contenidos que quieran reutilizar.

Referencias

Choi, K. S. (2010): Motivating students in learning mathematics with GeoGebra. *Annals Computer Science Series*, *8*(2), 65-76.

Crémer, J. (2011): A very minimal introduction to TikZ. *Tantau et al.: TikZ & PGF Manual, both available at https://www. ctan. org/pkg/pgf*.

Fernández Gonzáles, J., Elortegui Escartín, N., Moreno Jiménez, T. & Rodríguez García, J. F. (2007): ¿Cómo hacer unidades didácticas innovadoras?

Hernández, E. (2012): Álgebra y geometría, segunda edición. Addison-Wesley/UAM.

Hohenwarter, M., Borcherds, M., Ancsin, G., Bencze, B., Blossier, M., Delobelle, A., Denizet, C., Éliás, J., Fekete, Á., Gál, L., Konečný, Z., Kovács, Z., Lizelfelner, S., Parisse, B. & Sturr, G. (2013): *GeoGebra 4.4* [http://www.geogebra.org].

Kuhn, T. S. (1962): The structure of scientific revolutions. *Chicago and London*.

Lamport, L. (1994): *LATEX: a document preparation system: user's guide and reference manual*. Addison-wesley.

Merino González, L. & Santos Aláez, E. (2006): *Álgebra Lineal con métodos elementales*. Thomson-Paraninfo.

Moreira, M. A. (2008): Organizadores previos y aprendizaje significativo. *Revista chilena de educación científica*, *7*(2), 23-30.

Salazar, J. V. F., Gaita, C., Malaspina, U. & Ugarte, F. (2012): The use of technology and teacher training: An alternative for the teaching of spatial geometry, En *12th International Congress on Mathematical Education. Korea: ICME*.

Voß, H. (2010): *Typesetting mathematics with LATEX*. UIT Cambridge Ltd.

Young, J. (1968): The teaching of mathematics. *The Mathematics Teacher*, *61*(3), 287-295.

Índice de figuras