Problemas para Pensar

Tema 5. Estrategias y recursos para la resolución de problemas. Resolución de problemas en contextos reales y disciplinas asociadas

Matemáticas en el Paradigma Educativo Actual
Máster de Formación del Profesorado, UNED

Antonio García Sevilla

Septiembre 2019

Índice

1. Introducción **1**

2. Modelos de Estructuración **1**
2.1. Regla de Laplace 1
2.2. Trigonometría 2

3. Modelos de Enlaces **3**
3.1. Sucesiones numéricas 3
3.2. Ecuaciones de primer o segundo grado. 4

4. Modelos de Transformación **5**
4.1. Áreas de figuras planas 5
4.2. Poliedros 5

5. Modelos de Composición **6**
5.1. Función lineal 6
5.2. Escalas 7

6. Modelos de Interconexión **8**
6.1. Números irracionales 8
6.2. Estadística 8

7. Conclusión **9**

Bibliografía **10**

1. Introducción

Cuando di clase por primera vez en secundaria, como parte del Prácticum del Máster de Formación del Profesorado, una de las actividades que más me apetecían era la resolución de problemas. Los problemas son como un juego, un desafío mental de la comprensión, en el que hay que seguir la pista al enunciado, hacer una composición de lugar, y finalmente llegar al momento ¡ajá!, en el que sabes qué fórmula aplicar, qué cálculos realizar, para llegar al resultado.

Sin embargo, a los alumnos muchas veces los problemas les dan miedo. Prefieren, en su mayoría, los ejercicios, que tan aburridos me resultaban a mí para poner. ¿Cómo te inventas otro ejercicio más de senos y cosenos? ¡Si ya hemos calculado todas las combinaciones! ¿No sería más interesante un problema, en el que hubiera escondidos triángulos, para buscarlos como un detective, y una vez encontrados resolverlos?

Parte del problema, según "La resolución de problemas matemáticos: Creatividad y razonamiento en la mente de los niños", por José Antonio Fernández Bravo [1], es inseguridad y miedo. Los alumnos están acostumbrados a que se les evalúe por la precisión de un resultado numérico, que, si han seguido el algoritmo aprendido correctamente, está garantizada. ¿Cómo saben si están haciendo bien un razonamiento, si esto no es un número que se pueda calcular? La creatividad a la que están acostumbrados no es guiada, es libre y liberadora. Esto es muy sano emocionalmente, pero también se puede utilizar la creatividad de manera intelectual y razonada, guiada por el conocimiento y la lógica.

Fernández Bravo propone una serie de modelos, agrupados en metamodelos más amplios, para la creación de problemas a plantear a los alumnos que desarrollen este razonamiento creativo y pensamiento lógico en el contexto matemático. En este documento, usando algunos de los modelos planteados, se exponen un par de ejemplos de problema basados en el temario de matemáticas del segundo ciclo de secundaria. Los problemas están agrupados por metamodelo, y su título es la unidad o unidades didácticas que comprenden.

2. Modelos de Estructuración

2.1. Regla de Laplace

Enunciado: Inventar las reglas de un juego de cartas en el que los jugadores tienen que hacer combinaciones de cartas (estilo "Rummy", "Canasta", "Chinchón", etc.) tal que las combinaciones que puntúan tengan probabilidades: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$.

Este problema tiene un aspecto lúdico, y por tanto puede atraer la atención de los alumnos, pero no es trivial de solucionar. Requiere tener muy en mente el espacio de probabilidad (primero, planteándose cuál es este, nótese que el enunciado no dice qué baraja se usa), y usar la regla de Laplace de manera inteligente agrupando sucesos elementales de manera coherente pero también realista, al ser un juego de cartas que tiene que poderse jugar (nótese también que este requisito no está explícito en el enunciado, pero el alumno se lo autoimpondrá al querer obtener un resultado "jugable").

En el aula, se puede permitir el trabajo en grupo o individual, y lo ideal es incluir intervalos en los que los alumnos prueban los juegos de los demás, siendo así expuestos a distintas soluciones e ideas que pueden incorporar a su solución, y que les ayudará a estructurar el conocimiento esperado.

Las distintas probabilidades a dar como dato se pueden ajustar, y es interesante añadir alguna (como $\frac{1}{32}$) que sea de difícil ajuste en las barajas habituales, creando en el alumno el desafío de integrarla, y entendiendo las relaciones entre la estructura del espacio de probabilidad y sus subconjuntos con los números y sus divisores, y las probabilidades resultantes.

2.2. Trigonometría

Enunciado: Inventa problemas que se resuelvan con las siguientes expresiones matemáticas:

a) $3 \cdot \cos(45^o)$

b) $2 \cdot \mathrm{sen}(30^o)$

c) $\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{3}{4}$

La relación entre las distintas razones trigonométricas y las medidas de un triángulo es el objeto principal del tema de Trigonometría de la ESO. Es un tema que se presta muy bien a la creación y resolución de problemas, en los que entender y dibujar la situación problemática es fundamental. Sin embargo, aprender a hacer esto no es trivial, y simplemente conseguir un dibujo en el que estén todos los datos presentes puede llevarnos a un cálculo resoluble pero con una respuesta que no es la correcta según el enunciado.

Usando el metamodelo de estructuración, y siguiendo el ejemplo 7 de Fernández Bravo, p. 77 [1], proponemos los ejercicios anteriores, en los que el alumno, al tener que poner el problema a partir de la solución ya dada, puede entender más profundamente las relaciones entre los ángulos y medidas. En el futuro, al tener esta experiencia en la creación de problemas, será más fácil entender cómo plantear un problema nuevo, y asignar los datos a las incógnitas adecuadas.

Dependiendo del trabajo que queremos que hagan los alumnos, podemos aceptar simplemente triángulos con incógnitas cuyo valor sea la solución provista, o pedir que incorporen un vocabulario de la vida real, inspirándonos en los metamodelos de interconexión, para que la conexión entre el problema planteado en castellano y el planteamiento matemático aparezcan también en el trabajo del alumno.

3. Modelos de Enlaces

3.1. Sucesiones numéricas

Enunciado: Completa las preguntas que tienen la solución indicada, para el siguiente enunciado: Si tenemos las sucesiones:

a) 2, 4, 6, ...

b) 1, 1, 2, 3, 5, ...

1. ¿_____? 8
2. ¿_____? 13
3. ¿_____? 7
4. ¿_____? 1, 2, 1,5, $1.\overline{6}$, ...

Soluciones:

1. ¿Cuál es el siguiente término de a)? O ¿Cuál es el siguiente término de b)?
2. ¿Cuál es el séptimo término de b)?
3. ¿Cuál es la suma de los primeros cuatro términos de b)?
4. ¿Cuál es el cociente de los términos sucesivos de b)?

Dentro del tema de sucesiones, hay muchas posibles operaciones a realizar, por lo que probarlas todas es inviable. El plantear las respuestas a preguntas que tienen que ser resueltas por los alumnos les hace observar y razonar.

Por ejemplo, en la tercera pregunta, tienen que observar que al ser siete un número impar, difícilmente va a estar relacionado con la primera sucesión. Pero si ya han resuelto las dos preguntas anteriores, no puede ser tampoco un término de la otra, por lo que tendrán que pensar en otras cosas que se pueden hacer, y razonar cuál de ellas puede resultar en un número tan pequeño relativo al resto de términos.

La última pregunta puede ser difícil según el nivel de los alumnos, pero en un curso adecuado nos permite enlazar con el concepto de límite. Desde luego, b) es la conocida sucesión de Fibonacci, un tema siempre ameno con el que acabar una clase y que puede incitar a búsqueda de información por parte de los alumnos.

3.2. Ecuaciones de primer o segundo grado.

Enunciado: Inventa preguntas, y halla la solución, para el siguiente problema:

Cuando decimos que una televisión es de 40 pulgadas, queremos decir que su diagonal mide 40 pulgadas. Una pulgada son 2,54cm, por lo que la diagonal son más o menos 100cm. También sabemos que las pantallas de hoy en día tienen formato 16:9, lo que quiere decir que el ancho dividido entre el alto es $\frac{16}{9}$, y antes tenían formato 4:3. Cuando la resolución es 1080p, quiere decir que en un fotograma de la película hay 1080 filas de píxeles.

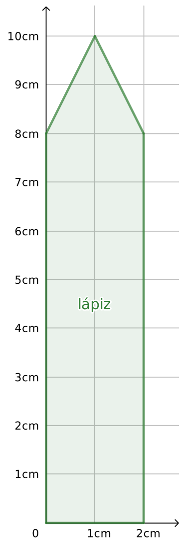
Al presentar datos sobre un aspecto cotidiano de la vida de los alumnos, es de esperar que despertemos su interés, y quieran saber más sobre el formato, tamaño y resolución de los televisores. Con el enunciado presentado, hay multitud de preguntas que responder, muchas de ellas que pueden ser de interés para el alumno de hoy en día. Algunos ejemplos son:

1. ¿Cuánto miden los lados de la televisión?
2. ¿Cuánto mayor es el alto que el ancho?
3. ¿Cuántas columnas de píxeles hay en un fotograma de una película 1080p? ¿Y si el formato fuera 4:3?
4. ¿Cuánto ocupa un píxel de la televisión que hemos descrito?

En general estas preguntas requieren de manipulaciones algebraicas de ecuaciones simples, que se basan en relaciones aritméticas entre dos variables. Si queremos incidir en algún aspecto específico de la resolución de ecuaciones, podemos dar un vocabulario obligado a incluir en las preguntas, que guiará el proceso a las relaciones que queremos. Por ejemplo: 20cm más (lleva a ecuaciones de primer grado con términos independientes), área (las ecuaciones tendrán términos al cuadrado). Podemos también pedir que se incluya la "densidad de píxeles", lo que puede motivar mucho al alumno, por ser un tema de discusión muy frecuente con los dispositivos móviles actuales.

4. Modelos de Transformación

4.1. Áreas de figuras planas



Enunciado: Llamamos un “pentágono lápiz” a una figura geométrica de 5 lados tal como la de la figura, que se puede interpretar como un rectángulo, unido a un triángulo isósceles por la base. Si la base del lápiz es 2cm, la altura 10cm, y la longitud de la punta 2cm, ¿cuánto es el área? **Solución:** 18cm^2.

Si queremos mantener el área de la figura, pero que la punta mida 4cm, ¿qué otros datos tenemos que cambiar? Y, ¿si queremos que la base sea 1cm? Por último, ¿cómo tendría que ser el lápiz para que el área midiera 21cm^2?

Soluciones: Para que la longitud de la punta sea de 4cm, la altura del lápiz tiene que ser de 11cm. Si la base es 1cm, entonces tienen que ser 20cm. Para que el área sean 21cm^2, una posibilidad es que la base sea de 3cm, la altura 8cm, y la longitud de la punta 2cm.

Lo primero que debe hacer el alumno, por supuesto, es entender el problema, mirando la figura y asociando los datos a las distintas medidas. El enunciado es un poco ambiguo de manera intencionada (¿la punta del lápiz está incluida en la altura?), pero al estar el problema resuelto, el alumno puede comprobar fácilmente cuáles son los supuestos correctos.

Una vez entendido el enunciado, el cálculo es muy fácil, y el alumno comprueba que las fórmulas que conoce y las intuiciones que ha utilizado (descomponer la figura) son correctas, al tener el resultado. Es en este momento cuando empieza la utilidad verdadera del problema, pues al tener que transformar los datos de manera más o menos libre, pero con un resultado a obtener, se profundiza en las relaciones de los distintos datos, y la incidencia de las medidas de los lados en el área de las figuras comprendidas.

4.2. Poliedros

Enunciado: Busca los errores en los siguientes enunciados, sabiendo que la solución es correcta, y todos los datos son siempre números enteros:

a) Un tetraedro es un poliedro regular formado por 4 triángulos equiláteros que tiene **5** vértices. ¿Cuántas aristas tiene? **Sol.:** 6.

b) Un octaedro se puede ver como dos pirámides rectangulares pegadas por la base. Si la base mide 5cm^2, y las alturas **2cm**, ¿cuánto es el volumen? **Sol.:** 10cm^3.

c) La base de un prisma triangular tiene base y **altura** 3cm. Si el prisma mide 10cm de alto, ¿cuál es su volumen? **Sol.:** 30cm^3.

d) La base de un prisma regular es un **pentágono** de lado 5cm, y la altura del prisma son 6cm. ¿Cuánto es el volumen? **Sol.:** 150cm^3.

Las relaciones que establecen áreas, volúmenes, y número de aristas, lados y vértices (fórmula de Euler) son ecuaciones bastante simples. Por tanto, si en vez de darnos los datos y preguntarnos la solución, nos dan la solución y nos preguntan uno de los datos, podemos resolver la ecuación sin pensar.

En este caso, sin embargo, nos dicen que hay un error en uno de los datos. Resolver analíticamente todas las posibilidades y comprobar cuál encaja es una tarea bastante costosa. Además, hemos hecho la "trampa" de que alguno de los errores (marcados en negrita) no son numéricos. El procedimiento a seguir es ir cambiando estos datos, lo que nos permite observar cómo cambia la solución. Esta transformación consolida la importancia de las relaciones entre los distintos elementos, que es mucho más importante que el cálculo (bastante inmediato) de los distintos valores.

Tanto el problema anterior como éste enfatizan el uso de la intuición geométrica sobre el cálculo, cosa que a veces a los alumnos les falta. Para desarrollar esta intuición, la manipulación de los distintos conceptos es lo más útil. En el anterior tema vimos como el uso de GeoGebra podía ayudar a ver éstas relaciones dinámicamente, y este tipo de problemas de transformación son el equivalente algebraico y más abstracto, que ayuda a pasar la visión espacial a dentro de la mente.

5. Modelos de Composición

5.1. Función lineal

Enunciado: Completa los datos del siguiente problema:

El aero-jóquey, o "Hockey de aire", es un juego de dos jugadores que se juega sobre una mesa, sobre la cual un disco se desliza sin apenas fricción. Los jugadores tienen cada uno una meta o portería, y un mazo con el que pueden golpear el disco, que se desplaza en línea recta hasta rebotar contra una pared, o entrar en la portería del rival.

Digamos que nuestra mesa es un rectángulo de 1m de ancho, el eje x, y 2m de largo, el eje y. Las porterías miden ____cm y están centradas en cada uno de los lados menores de la mesa. Para nuestros propósitos, el disco se mueve formando una línea recta, es decir la distancia en el eje y es una función lineal de la posición en el eje x.

a) Juan golpea el disco con el mazo en el punto (20cm, 20cm), con pendiente 4. ¿Mete gol? **Respuesta:** Sí.

b) El disco parte desde la esquina izquierda del lado contrario, y viene hacia el centro de la portería de Juan en línea recta. Si Juan sólo puede poner el mazo a _____cm de distancia de su lado de la mesa, ¿Dónde tiene que poner el mazo para que no le metan gol? **Respuesta**: 7,5cm a la izquierda del centro.

En este problema, la clave es hacer un dibujo correcto, que nos permita hacer los cálculos e interpretar los resultados. Pero al faltar los datos, este dibujo es necesariamente incompleto, por lo que tenemos que trabajar con variables algebraicas y seguir el procedimiento esperado (calcular el punto de intersección con los ejes de una función lineal). Una vez resuelto, podemos trabajar hacia atrás con el resultado que nos dan, completando así los datos que faltan. En el apartado b, al darnos la respuesta en un marco de referencia un poco distinto (respecto al centro en vez de a los ejes) tenemos que pensar un poco en qué significa esto.

Estos datos no tienen por qué ser únicos, y esto no es importante, sino el procedimiento de composición que nos lleva a ellos. Por compleción, los que se han usado para poner el problema son: portería 50cm, distancia del mazo en y: 30cm.

5.2. Escalas

Enunciado: Dibuja en un folio un mapa de tu casa. ¿A qué escala lo has dibujado? Intercambia tu mapa con el de un compañero. Elige objetos de su casa que encajen en las siguiente pregunta: ¿Cuál es la distancia entre _____y _____? **Sol.:** 5m. ¿Qué hay a 2m de la puerta de entrada? Dibuja tu dormitorio al lado del de tu compañero, manteniendo la misma escala. Devuélvele el mapa a tu compañero, e inventa una pregunta para él, cuya solución sea 1m.

La idea de este ejercicio es estimular la creatividad y la memoria de los alumnos a la vez que utilizan la inteligencia lógico-matemática. Al intercambiar los mapas, ya no pueden fiarse de su conocimiento intuitivo del edificio, sino que tienen que fiarse de la herramienta matemática de la escala, y hacer los cálculos apropiados. El tener que inventar preguntas con las soluciones dadas, tienen que cambiar varias veces de escala, pasando del mundo real al dibujo y viceversa, de tal manera que idealmente desarrollan una comprensión visual del concepto de escala a la vez que son capaces de manejarlo matemáticamente.

6. Modelos de Interconexión

6.1. Números irracionales

Los números irracionales son un tema siempre complicado para poner ejercicios. Las intuiciones y entendimiento respecto a estos números son muy importantes, pero el conocimiento que se puede impartir a nivel de secundaria es poco más que "son los números que no son una fracción". Para ayudar a desarrollar una intuición un poco más profunda, lo ideal es hacer un ejercicio de selección de información como el propuesto en la página 95 de Fernández Bravo [1].

Se subdivide a los alumnos en grupos, y se les plantea la siguiente tarea detectivesca: "¿Cuáles de los siguientes números son irracionales?". Se puede poner en la pizarra una serie de números, como constantes famosas (π, e, ϕ), algunas raíces, y algún número entero. Es de esperar que los alumnos ya sepan la respuesta, pero se les pide que lo demuestren al resto de la clase, procedimiento fundamental en el pensamiento matemático.

Para ello, se les presenta una serie de "pistas" en forma de tarjetas, que contienen partes de las pruebas de irracionalidad, o relaciones entre distintos números que implican que ambos pertenecen a la misma clase.

Es cierto que puede ser un ejercicio un poco complicado, pero si funciona presenta a los alumnos conceptos importantísimos como la demostración, la reducción al absurdo, la importancia del rigor, de manera intuitiva y directa, y con un poco de suerte amena.

Otra variante, quizá una manera de hacer el ejercicio más fácil, es centrarse sólo en un número, como la raíz de dos, y presentar todos los hechos de la clásica prueba pitagórica de que es irracional en pasos pequeños, y entremezclados con otros hechos ciertos pero irrelevantes. En este caso, el desafío es ser el primer grupo en completar la prueba de que $\sqrt{2}$ es efectivamente irracional.

6.2. Estadística

La estadística es uno de los "cocos" de las Matemáticas de secundaria para muchos alumnos, e incluso para algunos profesores. Son un tema difícil por tener probablemente la mayor complejidad en el cálculo del temario. Esto se debe a que tienen una naturaleza altamente interpretativa, y el aplicar correctamente una fórmula no necesariamente garantiza que tengamos un resultado correcto.

Sin embargo, un entendimiento correcto de la estadística y sus mecanismos es un requisito fundamental para la alfabetización matemática en el mundo moderno. Un problema ideal para desarrollar este entendimiento requiere del interés de los alumnos en los resultados, y su involucramiento en el proceso de recogida y tratamiento de los datos. Proponemos para esto una mezcla del metamodelo de interconexión como en el problema anterior y la metodología de gamificación:

El profesor prepara de antemano un conjunto de jugadores de fútbol, a los que asigna tres distribuciones de probabilidad, para las cuales la variable independiente es el tiempo y la dependiente, el rendimiento en cada una de las tres áreas del campo de juego: defensa, centro del campo y delantera. Lo más recomendable son dos distribuciones de Poisson que representen el número de goles interceptados, y goles marcados. Es recomendable usar un programa matemático para generar estas distribuciones, o un paquete estadístico como R.

Una vez hecho esto, el profesor coloca los jugadores en equipos de fútbol aleatorios, y simula una temporada. Por cada par de equipos se hace un partido, y se calcula el número de goles marcados menos el de interceptados, y ese es el resultado del partido. El profesor hace varias simulaciones de temporadas, y prepara tarjetas con los resultados de cada equipo.

En clase, el objetivo de los alumnos es componer un equipo con los jugadores de fútbol. Para ello, tienen acceso a las tarjetas de resultados, y deben calcular el rendimiento de los jugadores con las herramientas estadísticas de que disponen (probablemente, no hacer una inferencia completa del parámetro de la Poisson, pero sí calcular medias y desviaciones típicas, que les ayudan a elegir los jugadores). Cuando los alumnos tengan cada uno su equipo, al final de clase se hace una simulación, y en base a los resultados se reparten premios.

Este problema combina la búsqueda de información y el cálculo guiado del metamodelo de interconexión, con la motivación de los métodos de gamificación. Esta motivación ayuda a que los alumnos realmente estén interesados en el resultado de sus cálculos, y al observar todo el proceso aprendan conceptos como variables independientes, distribución de probabilidad, y margen de error.

En caso de tener alumnos no muy aficionados al fútbol (o tan aficionados que la simplificación que hacemos no sea productiva) se puede buscar otro dominio, pero los deportes de competición presentan unas características muy buenas para este tipo de ejercicios.

7. Conclusión

En este documento se han presentado diez problemas, cubriendo distintos metamodelos de intervención, y distribuidos a lo largo del temario de matemáticas del segundo ciclo de secundaria. Los problemas varían mucho en tiempo necesario para resolverlos, y aunque algunos son muy parecidos a problemas tipo del temario, otros se desvían más de lo habitual y requieren más tiempo y esfuerzo, tanto por parte del profesor como del alumno.

Este tipo de metamodelos, en general, lo que pretenden es traer al alumno un poco al otro lado, el del profesor, y encargarle que complete o idee enteramente los problemas a resolver. Mediante esta técnica, el alumno puede observar y trabajar con el significado del problema, su estructura matemática, y entender más allá del cálculo y la resolución el porqué del problema, el porqué de las fórmulas y ecuaciones, y cómo todos ellos se relacionan.

Al final, "cada maestrillo tiene su librillo", por lo que no se espera que estos problemas sean planteados tal cual a los alumnos, sino que sirvan de inspiración para ello. Por mi parte, la puesta en práctica de los modelos propuestos por Fernández Bravo me ha ayudado a ver lo que plantea el autor en los primeros capítulos: que la resolución de problemas no tiene como objetivo mejorar el cálculo y hacer más variados los ejercicios, sino servir como entrenamiento a la mente y el pensamiento lógico-matemático, en el cual es más importante el camino que el resultado, no porque éste no importe sino porque si conocemos el camino, siempre sabremos llegar al resultado.

Bibliografía

[1] Fernández Bravo, J. A. (2010): La resolución de problemas matemáticos. Creatividad y razonamiento en la mente de los niños, Grupo mayeútica.

[2] Villagrán, E. y Olfos, R. (2001): Actividades lúdicas y juegos en la iniciación al álgebra. Revista Integra, 5, 39-50.

[3] Gallego, F. B. (2005): Ubicuidad de la sucesión de Fibonacci. En Un breve viaje por la ciencia (pp. 49-54). Universidad de La Rioja.

[4] International GeoGebra Institute (2019): Manual de GeoGebra. Disponible en `https://wiki.geogebra.org/es/Manual`, consultado el 20 de Agosto de 2019.

[5] Vicario, V. y Yañez, J. C. (2005): Concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática: el caso de la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos y las funciones de la demostración. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM (pp. 145-152).

[6] Marín Díaz, V. (2015): La Gamificación educativa. Una alternativa para la enseñanza creativa. Digital Education Review, 27.

[7] Team R (2013): R: A language and environment for statistical computing.