Contar con los Dedos

Tema 1. Matemáticas en todas partes

Matemáticas en el Paradigma Educativo Actual
Máster de Formación del Profesorado, UNED

Antonio García Sevilla

Septiembre 2019

1. Introducción

Hoy en día, tenemos a nuestra disposición calculadoras, o programas que las simulan en ordenadores, móviles y demás dispositivos. Pero eso no significa que el cálculo mental no sea útil. Sumar y multiplicar sin aparatos, ni lápiz o papel para ayudarnos, puede servirnos en multitud de situaciones de la vida cotidiana. Hacer cálculos rápidos de descuentos en el supermercado, el pago mensual en una hipoteca para esa casa o ese coche, o incluso en un videojuego, ¿esa combinación de habilidades es mejor que esa otra?

Sin embargo, hay cálculos complicados que no son fáciles de resolver sin ayuda. Para esos momentos, nos puede servir un antiguo truco para multiplicar, usando sólo los dedos y las tablas de multiplicar del 10 o del 5 (fáciles, ¿no?).

Este documento presenta una clase de matemáticas basándose en ese truco, como prueba de evaluación continua para la asignatura Matemáticas en el Paradigma Educativo Actual.

2. Actividad Elegida

La actividad a desarrollar estará basada en la llamada "Multiplica con los Dedos" del cuadernillo de actividades proporcionado por el equipo docente para la actividad [2].

En esta actividad, se explica un truco para multiplicar números "grandes" con la ayuda de los dedos. Este truco es una tradición muy antigua, y podemos imaginar sería de mucha ayuda para los mercaderes de la antigüedad, que se encontrarían a menudo en situaciones donde sería necesario multiplicar figuras de cierta magnitud sin el apoyo de material de escritura (cuanto menos, calculadora o teléfono móvil).

El método utiliza dos claves para funcionar: primero, las manos. Los seres humanos tenemos (en general) dos manos, cada una con cinco dedos. Esto nos permite utilizar los dedos como "almacén" de figuras, aunque sólo del cero al cinco. Y aquí es donde interviene la segunda clave: la aritmética modular. Utilizando aritmética módulo cinco, podemos calcular la operación deseada con los operandos a nuestra vista en las manos. Eso sí, para ello tenemos que mantener en mente un par de resultados parciales, pero el truco funciona por ser éstos resultados múltiplos de cinco, lo que los hace más fáciles de tratar por su familiaridad y su relación con el sistema de numeración decimal.

En este documento realizaremos una versión ligeramente modificada. Para empezar, se invertirá el uso de los dedos, en lugar de contar con dedos doblados, se hará con dedos levantados. Imagino que la versión original, presente en el documento, usa los dedos doblados más que los extendidos por tener su origen en una cultura donde se cuenta con los dedos de manera diferente a la española [4]. En España, la tradición de contar con los dedos es ligeramente distinta, por lo que encuentro más fácil usar los extendidos. En cualquier caso, matemáticamente, las dos versiones son equivalentes.

La segunda modificación será en no dar la primera versión del truco, por utilizar una justificación algebraica un poco más complicada, y sobre todo, menos general. Aunque es el más fácil de ejecutar, también es probablemente el menos útil, pues se espera de los alumnos que ya sepan multiplicar los números del 5 al 10 de memoria.

Finalmente, añadiremos una versión general en la que los restos de los números a multiplicar no son el mismo, aunque no exigiremos a los alumnos su uso pero servirá como ejemplo de la utilidad del método en general.

3. Prerrequisitos y objetivos de la clase

Esta clase se puede impartir a partir del curso de 3º de la ESO, pues sus requisitos son únicamente la aritmética y álgebra de dos variables muy elemental. Sin embargo, se recomienda realizarla en 4º de la ESO, para que los alumnos tengan más agilidad en el manejo de estos conceptos, o en 1º de Bachillerato donde la introducción a la aritmética modular puede ser más asequible y provechosa.

Los objetivos de esta clase son tres:

1. Ejercitar la capacidad de cálculo mental, mejorar la agilidad de pensamiento lógico.

2. Mostrar la relación entre un "truco" útil en la vida real, y su justificación y formalización matemática.

3. Presentar el concepto de la aritmética modular de manera intuitiva y ligera.

El primer objetivo debería ayudar con la motivación a la clase, por ser práctico y entretenido, y requerir la participación de los alumnos así como de su cuerpo, siendo una posible desviación de la matemática habitual que es muy cerebral.

El segundo objetivo es un repaso de la capacidad algebraica y lógica, si no con un ejercicio muy difícil, al menos con un uso de los resultados menos habitual, y por tanto que ayuda a solidificar el razonamiento abstracto como algo general y no sólo la "receta para resolver los ejercicios del temario".

El tercer objetivo es quizá menos importante, por ser menos inmediato, pero su presentación cronológica al final de las clase, así como la idea que presenta, tiene el potencial de quedar en la mente de los alumnos y permitir un mayor entendimiento de la aritmética modular, algo que está presente en el día a día y que intuitivamente ya saben manejar, pero al que se da a menudo poco tratamiento formal.

4. Desarrollo

La clase está pensada para ser desarrollada en un periodo lectivo, aunque dependiendo de la duración de éste podrán realizarse algunas actividades con más o menos detalles.

El desarrollo se divide en tres partes. Para empezar, se da una introducción breve, con alguna nota histórica o contenidos para estimular el interés, y se explica el algoritmo o truco. En esta fase, de experimentación, se espera que los alumnos ejerciten un poco su capacidad de cálculo y exploren, realizando por su cuenta algunos cálculos. Esto ayudará a estimular la parte lógico-matemática del cerebro, así como el interés en la actividad.

Ejemplo 1. Para multiplicar 13 y 14, subo tres dedos en la mano izquierda y cuatro en la derecha, porque es lo que "sobra" de 10. Empiezo con cien como aproximación (diez por diez). Le sumo diez por la primera mano ($100+10\cdot 3=130$), y luego diez por la segunda ($130+40=170$). Finalmente, multiplico los dedos de la primera mano por los de la segunda, y lo sumo. Tres por cuatro es doce: $170+12=182$, el resultado correcto.

Ejemplo 2. Ahora, para multiplicar 22 por 21, levanto dos dedos en una mano y uno en la otra. Hacemos el cálculo igual, pero en vez de 10 ponemos 20: $20\cdot 20+20\cdot 2+20\cdot 1+2\cdot 1=400+40+20+2=462$.

Ejemplo 3. En este caso queremos multiplicar 17 y 19, que están entre 15 y 20. En una mano levanto dos dedos ($17 = 2 \bmod 15$) y en la otra cuatro ($19 = 4 \bmod 15$). En este caso, en lugar de 10 o 20 tengo que utilizar 15, lo cual puede complicar un poco el cálculo según el nivel de los alumnos. Sin embargo, este ejemplo es bueno precisamente por introducir el módulo 5, que son los dedos de la mano. $17 \cdot 19 = 15 \cdot 15 + 15 \cdot 2 + 15 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 225 + 30 + 60 + 8 = 323$.

En la segunda fase, aprovechando el interés creado y la falta de cansancio, se hará la demostración matemática de la corrección del truco. Al ser una simple manipulación algebraica, se pedirá a los alumnos que la realicen completamente ellos, dando los punteros necesarios para que ningún alumno esté parado. Esta fase se puede realizar también en grupos u otro tipo de metodologías colaborativas, o si hay tiempo se puede pedir a los alumnos que lo preparen y luego lo expongan ante sus compañeros. Si se integra esta actividad en un currículum habitual, en esta fase lo lógico es seguir la metodología habitual de la asignatura.

1. $(15 \leq x, y \leq 10): \ x \cdot y = (10 + x_l) \cdot (10 + y_l) = 10 \cdot 10 + 10x_l + 10y_l + x_l \cdot y_l$
   Donde $x_l = x - 10$, $y_l = y - 10$, los dedos levantados.
2. $(20 \leq x, y \leq 15): \ x \cdot y = (15 + x_l) \cdot (15 + y_l) = 15 \cdot 15 + 15x_l + 15y_l + x_l \cdot y_l$

Se puede ver que el procedimiento es generalizable para distintos restos. De hecho, ni siquiera se necesita que ambos multiplicandos estén en el mismo intervalo. Para aliviar el cansancio de los alumnos que lo necesiten, pero mantener el ritmo de trabajo y aprovechar para añadir más conocimiento, en este momento puede tomar el relevo de nuevo el profesor y hacer un última cálculo: 36 por 74.

A mano Damos este ejemplo primero “con texto”, para hacer más claro el desarrollo del truco y quizá ayudar a vocalizarlo. Empezamos con 36. Le sobra uno de 35, así que levantamos un dedo en la mano izquierda. Nos tenemos que acordar que en el puño cerrado “quedan” 35. En el caso de 74, levantamos cuatro dedos en la mano derecha y nos guardamos en el puño setenta.

Empezamos por lo más difícil, que es multiplicar los puños. 35 por 70 es –3 por 7, 21, como hay dos ceros 2100, más 5 por 7, 35, con un cero 350– 2450. Ahora le sumamos 35 del puño izquierdo por cuatro dedos levantados, 35 por 2, 70, por dos otra vez 140, más 2450, 2590. Nos falta uno de la mano izquierda, por 70 del puño derecho, 2660. Y finalmente le sumamos los dedos multiplicados, uno por cuatro, con lo que el resultado final es 2664.

Algebraicamente

$$36 \cdot 74 = (35 + 1)(70 + 4) = 35 \cdot 70 + 35 \cdot 4 + 1 \cdot 70 + 1 \cdot 4 = 2450 + 140 + 70 + 4 = 2664$$

Se pueden combinar las dos explicaciones, primero a viva voz con las manos, y luego en la pizarra. Está claro que escrito es más fácil que hablado, pero la idea es mostrar que un producto relativamente complicado se puede hacer con los dedos sin necesidad de escribir nada.

Para finalizar, se sugiere hacer una introducción a la aritmética modular. Una manera quizá divertida de ligar con lo anterior es preguntar "pero, ¿qué haríamos si tuviéramos menos dedos?". O "¿se os ocurren más formas de multiplicar que no necesiten el número 10?". Se puede explicar aquí el método babilónico de contar [1, 3, 5], que da lugar a los sistemas de base 60, o si tenemos una clase interesada en la informática mostrar que cada dedo puede ser un dígito, y explicar la base binaria. Ligado con esto, se puede dar la explicación de la aritmética modular, utilizando los clásicos ejemplos de las horas del reloj, los minutos, segundos, etc.

La idea es acabar la clase con una actividad más relajada, pero que estimule la imaginación y permita a los alumnos, en su "rumiado" posterior de la clase, alcanzar entendimiento más profundo o descubrir y buscar por su cuenta más información.

4.1. Cronograma

1. (5 min) Introducción a la dinámica de la clase, organización en grupos si hace falta, etc.

2. (10 min) El profesor cuenta el truco, y se pide a los alumnos que lo utilicen para hacer multiplicaciones de dificultad creciente.

3. (30 min) Se pide a los alumnos que comprueben matemáticamente la validez del algoritmo. Según el tiempo disponible, cuando hayan pasado 10 minutos se puede dar la idea clave (descomponer los multiplicandos en cociente y resto de un factor fácil de multiplicar), incluso escribiéndola de manera algebraica.

4. (10 min) Ejemplo de multiplicar números dispares, y discusión final de los temas nombrados.

5. Conclusión

Con esta actividad, se pretende enseñar a los alumnos un truco para ayudar con el cálculo de multiplicaciones enteras. Sin embargo, lo más interesante no es el truco en sí, que algunos alumnos a lo mejor aprovecharán, y otros muchos no, sino la muestra de cómo saber cosas formales de matemáticas (álgebra, módulos, etc.) nos puede ayudar a situaciones cotidianas como es realizar multiplicaciones.

La realización de este trabajo me ha ayudado a descubrir mucha información sobre trucos de cálculo mental y sistemas de numeración, aunque éstos sean temas tangenciales y que al final no han resultado relevantes para el trabajo. Lo que sí que ha sido muy útil ha sido el pensar en cómo estos trucos y conocimientos se relacionan con el día a día.

Elegí esta actividad de "Contar con los Dedos" precisamente porque a menudo yo mismo tengo dificultad con el cálculo mental, y aprecio este tipo de "trucos", sobre todo si entiendo el motivo por el que funcionan. La relación de esto con otro tema de las matemáticas que me parece muy interesante y poco tratado en la secundaria, la aritmética modular, me llamó mucho, aunque finalmente al elaborar la clase fui consciente de que tampoco se puede meter tanto contenido, y es mejor centrarse en algo concreto, y contar lo que se pueda simplemente para picar la curiosidad de los alumnos.

Bibliografía

[1] Cid, E.; Godino, J. D.; Batanero, C. (2003): Sistemas numéricos y su didáctica para maestros. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, p. 193.

[2] Bas López, M.; Belloch Belloch, A.; Del Rincón Ruiz, R. (2006): Cuaderno de actividades de la exposición ¿Por qué las Matemáticas? (p. 17), Ed. SM. Documento pdf disponible en `www.oei.es/historico/salactsi/Mat_Actividades.pdf`. Consultado el 15 de agosto de 2019.

[3] Vaquero, C. P. (2010). La contabilidad en las civilizaciones antiguas. Cont4bl3, (35), 34-36.

[4] Bender, A., y Beller, S. (2011): Fingers as a tool for counting–naturally fixed or culturally flexible?. Frontiers in psychology, 2, 256.

[5] Cervera F. (2014): Historia de los números II. Los sumerios, los babilonios y el sistema sexagesimal, artículo online disponible en `https://ulum.es/historia-de-los-numeros-ii-los-sumerios-los-babilonios-y-el-sistema-sexagesimal/`. Consultado el 18 de agosto de 2019.