

LA INTEGRACIÓN NUMÉRICA Y EL PROBLEMA DE VALORES INICIALES

Complementos Para la Formación Matemática
Máster de Formación de Profesorado, UNED

Antonio García Sevilla

Enero 2019

Índice general

Índice general	1
1 Introducción	2
1.1. Motivación	2
1.2. El problema a resolver	3
1.3. El problema de los n cuerpos	4
1.4. Los marcianitos	6
1.5. La necesidad de la aproximación numérica	7
2 Métodos	9
2.1. Método de Euler	9
2.2. Derivación formal	12
2.3. Cota de error	13
2.4. Euler implícito	14
2.5. Euler semi-implícito	15
2.6. Método del salto de rana	16
Bibliografía	17

Introducción

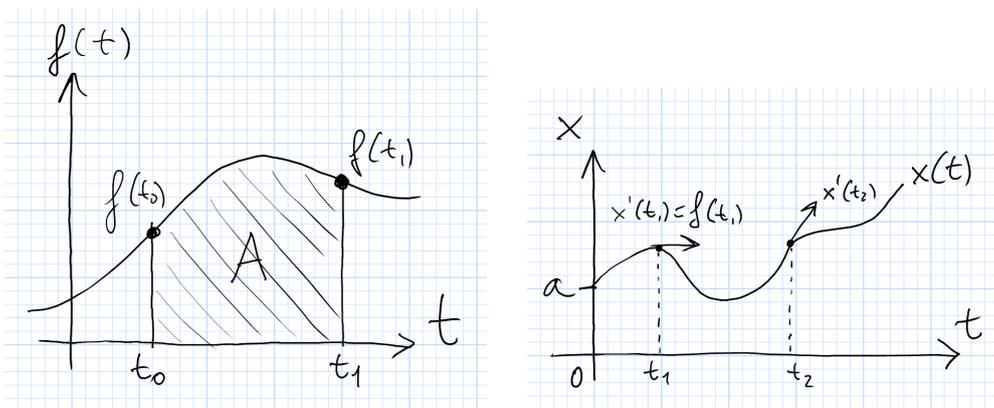
1.1. Motivación

Las matemáticas son el lenguaje del universo, aquél que usamos los matemáticos para describir las leyes que lo gobiernan y hacen funcionar. Además, las matemáticas son la base de las computadoras, siendo éstas en su fundamento, como su nombre indica, máquinas que calculan.

Los videojuegos son, por tanto, doblemente matemáticos. Como constructo puramente digital, su entidad es completamente matemática, desde las reglas del juego hasta las imágenes más artísticas que en él encontremos. Y como juego, se inspiran e intentan emular la realidad, el mundo físico, por lo que deben atender también a las matemáticas que lo rigen.

Las limitaciones de los ordenadores, así como el contexto del videojuego, hacen necesario la mayor parte del tiempo el uso de aproximaciones numéricas. En particular, las leyes de la mecánica, que utilizan los mecanismos del análisis, tienen que ser aproximadas y simuladas utilizando derivación e integración numérica.

En este trabajo se hace una aproximación a estas cuestiones, ilustrando con ejemplos actuales y mostrando en un contexto diferente al habitual, y de posible interés para el lector más joven, la importancia y utilidad de la integración numérica, el tema 31 de la asignatura [8].



(a) La integral como el área bajo una curva. $A = F(t_1) - F(t_0)$, $F'(t) = f(t)$ (b) La integral como la curva solución del problema de valores iniciales.

Figura 1.1: Dos aplicaciones de la integración

1.2. El problema a resolver

La integración es una de las herramientas fundamentales del análisis, y puede ser utilizado para una gran variedad de aplicaciones. La más común, quizá por ser de fácil interpretación visual, es la del cálculo del área bajo una curva (ver figura 1.1a).

Esta explicación es intuitiva y útil, y al interpretar la primitiva de una función integrable como una función que calcula precisamente esta área, nos permite explicar y visualizar cantidades y valores que son el resultado de integrar a lo largo de una dimensión (temporal o espacial) otra función que es su derivada.

Otra aplicación muy útil de la integración, en la que nos centraremos en este trabajo, es la de la resolución del problema de valores iniciales, muy común en la física. Este problema se puede resumir como hallar el valor de una función en un punto arbitrario, conocida alguna de sus derivadas, y el valor de la función en un punto (el valor inicial). Es decir:

Problema de valores iniciales

$$\text{Dados } \begin{cases} x'(t) = f(t, x) \\ x(0) = a \end{cases}, \text{ cuál es valor de } x(t)? \quad (1.1)$$

Suponiendo que se cumplen todos los criterios de continuidad, derivabilidad, etc. necesarios (suposición bastante fuerte), podemos usar el teorema fundamental del calculo para obtener:

$$x(t) - x(0) = \int_0^t x' dt = \int_0^t f(t, x) dt = F(t, x) - F(0, x)$$

por tanto

$$x(t) = F(t, x) - F(0, x) + a \quad (1.2)$$

Donde $F(t)$ es una primitiva de $f(t, x)$ respecto a t , y conociéndola tenemos solución $x(t)$ para el problema de valores iniciales (1.1), como se representa gráficamente en la figura 1.1b. Este resultado en \mathbb{R} se extiende a \mathbb{R}^n mediante los procedimientos habituales. Observemos, no obstante, que dependiendo de la dependencia de F en x , la ecuación (1.2) puede ser implícita y más o menos complicada de resolver.

Por otro lado, no siempre es posible obtener $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, con ejemplos tan notorios como $f(x) = e^{x^2}$, que aun siendo una función aparentemente inofensiva, no tiene primitiva compuesta de funciones elementales, o $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, que tampoco la tiene aunque su integral impropia converja en el infinito. Otras funciones, como $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, tienen discontinuidades (en este caso en 0) que las hacen imposibles de integrar en determinados intervalos (los que incluyan o se aproximen infinitesimalmente al 0).

1.3. El problema de los n cuerpos

Este es un problema clásico de la mecánica, expuesto por ejemplo en [1] y [10], que demuestra cómo algunas ecuaciones, aún siendo conocidos todos los mecanismos del cálculo implicados, y cumpliendo las funciones criterios de derivabilidad muy fuertes (todas son clase C^∞), sin embargo no se pueden solucionar de manera analítica.

Usamos una formulación algo modificada de la propuesta por el Rey Oscar II de Suecia, que llegó a ofrecer una recompensa por solucionar este problema en 1885 [4]:

Dado un sistema de n puntos de masa, que se atraen mutuamente de acuerdo con las ley de gravitación universal de Newton, y asumiendo que nunca habrá colisiones, hallar una representación de sus coordenadas en forma de una función de “buen comportamiento” de la variable tiempo.

La ley de Newton de la gravitación universal postula que, dadas dos masas m_1 y m_2 , en posiciones del espacio \vec{x}_1 y \vec{x}_2 respectivamente, se atraen mutuamente con una fuerza proporcional a las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia:

$$\begin{aligned} r_{21} &= \vec{x}_2 - \vec{x}_1 && \text{vector distancia entre los puntos} \\ \hat{r}_{21} &= \frac{r_{21}}{|r_{21}|} && \text{vector unitario (dirección) de la fuerza} \\ \vec{F}_{21} &= -G \frac{m_2 m_1}{|r_{21}|^2} \hat{r}_{21} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Siendo G la constante universal de gravedad.

Para estudiar la evolución del sistema, ponemos $x_i(t)$ como la posición de la masa i en el instante t , una función \mathcal{C}^∞ , y recordamos la segunda ley de Newton (1.4). Suponiendo que la fuerza de la gravedad es la única que actúa en nuestro sistema, para cada punto de masa i tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{F}_i &= m_i \vec{a}_i = m_i x_i'' && (1.4) \\ \vec{F}_i &= \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ji} = \sum_{j=1}^n -G \frac{m_j m_i}{|x_{ji}|^2} \hat{r}_{ji} = -G m_i \sum_{j=1}^n \frac{m_j r_{ji}}{|r_{ji}|^3} = -G m_i \sum_{j=1}^n \frac{m_j (\vec{x}_j - \vec{x}_i)}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^3} \\ x_i'' &= -G \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{m_j (\vec{x}_j - \vec{x}_i)}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^3}}_{f_i} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Y por tanto, podemos plantear nuestro problema de valores iniciales:

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ \vdots \\ x_n'' \end{pmatrix} = -G \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1(0) & x_1'(0) \\ \vdots & \vdots \\ x_n(0) & x_n'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

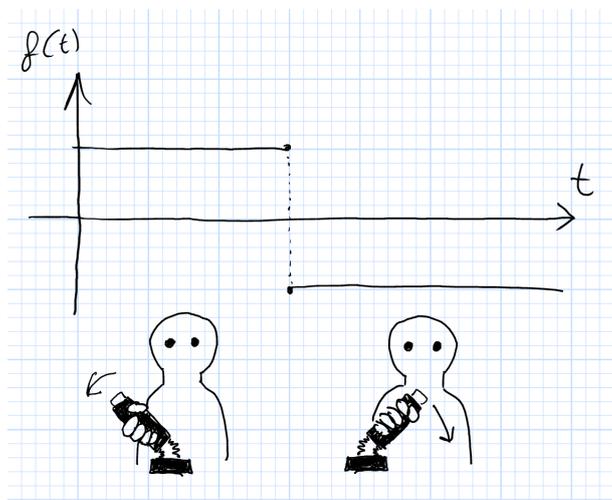


Figura 1.2: La función $f(t)$, que representa la propulsión, cambia de manera no necesariamente continua según la entrada del usuario.

En este caso, en lugar de la primera derivada tenemos la segunda, y por tanto para hallar la solución hay que integrar¹ dos veces. Esto hace que aparezcan dos constantes de integración y necesitemos dos conjuntos de valores iniciales, \mathbf{a} y \mathbf{b} , que en este caso se corresponden con las posiciones y velocidades iniciales de las partículas del sistema.

1.4. Los marcianitos

Sin salir de la mecánica clásica, nos podemos plantear otro problema muy actual: la simulación de esta mecánica en un videojuego.

Imaginémonos un juego, dentro del género popularmente conocido como “de marcianitos”. Estamos en el espacio, invasores alienígenas amenazan la Tierra, y debemos destruirlos para salvarla. Para ello, tenemos una nave espacial, con propulsores que nos permiten movernos en todas las direcciones. De momento, simplifiquemos el problema al máximo: supondremos que la nave es un punto de masa, sin dimensión. No hay invasores todavía, ni obstáculos espaciales, es decir, estamos completamente libres en el vacío.

¹Por convención y analogía, a veces se llama “integrar” a resolver una ecuación diferencial, y en este sentido usamos el término aquí.

La única fuerza que actúa sobre el sistema es la de los propulsores, que modelamos como una función $\vec{f}(t)$ que, para cada instante de tiempo t , toma como valor el vector de propulsión (dirección y magnitud) que aplica el jugador sobre la nave.

Podemos llamar $\vec{x}(t)$ a la posición de la nave, que en el caso de una pantalla bidimensional, es $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$, representando las coordenadas horizontal y vertical. Recordamos la segunda ley de Newton (1.4), y por tanto obtenemos de nuevo un problema de valores iniciales muy similar al de la sección anterior:

$$\vec{x}''(t) = \frac{1}{m}\vec{f}(t), \quad x(0) = a, \quad x'(0) = b \quad (1.7)$$

1.5. La necesidad de la aproximación numérica

En el problema 1.3, de los n cuerpos, la función f no parece excesivamente complicada. Aparece un valor absoluto en el denominador, que hace que tengamos que integrar con cuidado, pero no parece haber mayor complicación. Ésta reside en que al aumentar el número de cuerpos, como las posiciones (x) de éstos aparecen en todas las funciones f_i , no se conozca forma de integrar directamente para hallar las soluciones, pues f depende de x y a su vez x , que es desconocida, depende también de t .

Si $n = 2$ sí que se conoce la solución general, así como para un caso restringido de $n = 3$. Soluciones específicas existen también para el caso general, que hacen uso de simetrías y otras propiedades del sistema para encontrar funciones F que aporten soluciones particulares. Sin embargo, no hay ningún método que nos permita formular una solución general, ni explícita ni implícita, para el problema en el caso general (n cuerpos).

A su vez, en el problema 1.4, de los marcianitos, ni siquiera podemos plantearnos la integración analítica como método para hallar la solución. No conocemos los valores de $f(t)$ hasta que el usuario los decide, y debido a las limitaciones de los ordenadores, $f(t)$ no es continua ni derivable, sino una función constante a trozos, como se ve en la figura 1.2.

Afortunadamente, tenemos otra solución. La integración numérica aproxima el cálculo de integrales analíticas mediante algoritmos iterativos, que muchas veces no necesitan que la función a integrar sea continua, derivable, ni presente ningún tipo de “buen comportamiento”. Con que la función esté definida, es decir, podamos evaluarla en cada punto t , tenemos suficiente. A continuación veremos unos cuantos métodos de integración numérica, que se pueden utilizar para resolver nuestro problema u otros similares.

Métodos

2.1. Método de Euler

La idea intuitiva que subyace al método de Euler es muy sencilla. El problema de valores iniciales nos pide calcular una función $x(t)$ conocidos un valor inicial, x_0 , y una forma de calcular la derivada, $x'(t, x)$. La intuición nos dice que, puesto que la derivada lo que expresa es la tasa de cambio de x , al pasar un intervalo Δt , el cambio en x (Δx) será parecido a x' . Geométricamente, lo que queremos decir es que la función $x(t)$, en un intervalo pequeño de t , se parece a su recta tangente, como se muestra en la figura 2.1. Por tanto, sabiendo x_0 , aproximamos $x_1 = x(t_0 + \Delta t)$ con el valor $x(t_0) + \Delta t x'(t_0)$, que no es sino el valor en la recta tangente en el punto $t_0 + \Delta t$.

Es decir, dado el problema con el siguiente enunciado:

$$\begin{aligned}x'(t) &= f(t, x(t)) \\x_0 &= x(0) = a\end{aligned}$$

Fijamos un intervalo de tiempo h :

$$h = \Delta t = cte.$$

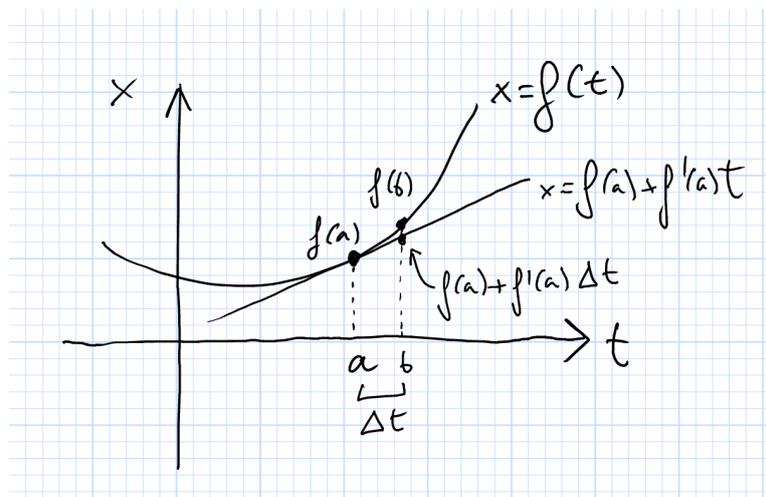


Figura 2.1: La derivada $f'(a)$ es la pendiente de la tangente a $f(t)$ en el punto a .

Y definimos como $x_n(t)$ el valor aproximado de $x(t)$ en $t + nh$, es decir, trascurridos n intervalos de tiempo:

$$x(t_1) = x(0 + h) \approx x_1 = x_0 + hx'(0) = x_0 + hf(0, x_0) \quad (2.1)$$

$$x(0 + 2h) \approx x_2 = x_1 + hx'(t_1) \approx x_1 + hf(t_1, x_1)$$

$$\vdots$$

$$x(0 + hn) \approx x_n = x_{n-1} + hx'(t_{n-1}) \approx x_{n-1} + hf(t_{n-1}, x_{n-1}) \quad (2.2)$$

La segunda aproximación de cada ecuación se debe a que usamos el valor de la iteración anterior, que ya en sí es una aproximación, para calcular el siguiente. Es decir, x_n está calculado a partir de x_{n-1} , que excepto en el caso de x_0 es una aproximación (x_0 es el “valor inicial”, y viene dado). Esto nos hace ver que el error será acumulativo, es decir, cuanto más lejos nos vayamos del valor inicial más grande será el error. Esto es un fenómeno universal de los métodos iterativos, que se basan en esta idea de aproximar la función con valores ya calculados, que a su vez son aproximaciones.

El método de Euler consiste precisamente en utilizar estas aproximaciones sucesivas, para irnos “acercando” a la posición final t_n y tener un valor x_n que aproxima a $x(t + nh)$.

Leonhard Euler es uno de los más grandes matemáticos de la historia. Nacido en 1707 en Basilea, Suiza, el inicio de su carrera estuvo muy ligado a la familia Bernoulli, grandes matemáticos que desarrollaron partes importantes del cálculo en el siglo XVIII. Más tarde se trasladó a Rusia, donde vivió gran parte de su vida bajo los auspicios de los zares Pedro el Grande y Catalina la Grande.

En el momento en el que Euler desarrolló su carrera, el cálculo estaba viviendo una rápida transformación y crecimiento, por lo que es natural que Euler se centrara en problemas de análisis y mecánica, similares a los que trataban sus mentores Bernoulli. Sin embargo su pasión por las matemáticas, su interés por el descubrimiento y su inmensa capacidad hacen que su nombre aparezca a menudo en matemáticas, en campos tan dispares como el cálculo numérico, el análisis de variable compleja y la teoría de grafos.

Durante su vida, publicó casi 900 libros e innumerables artículos, y es responsable de mucha de la notación estándar que utilizamos hoy en día, así como ecuaciones famosas como la imprescindible identidad $e^{i\pi} = -1$. De hecho, en una encuesta hecha a matemáticos del mundo entero sobre las ecuaciones más bonitas de la matemática, tres de las cinco más votadas se debían a Euler.

En un autor tan prolífico, el método que hemos descrito y que centra este trabajo apenas es una nota al pie de página. Aparece en el libro de texto "Institutionum calculi integralis", publicado alrededor de 1870, que contiene los descubrimientos y enseñanzas de Euler en el tema del cálculo integral y la resolución de ecuaciones diferenciales.^a

^aAdaptado libremente de [9]

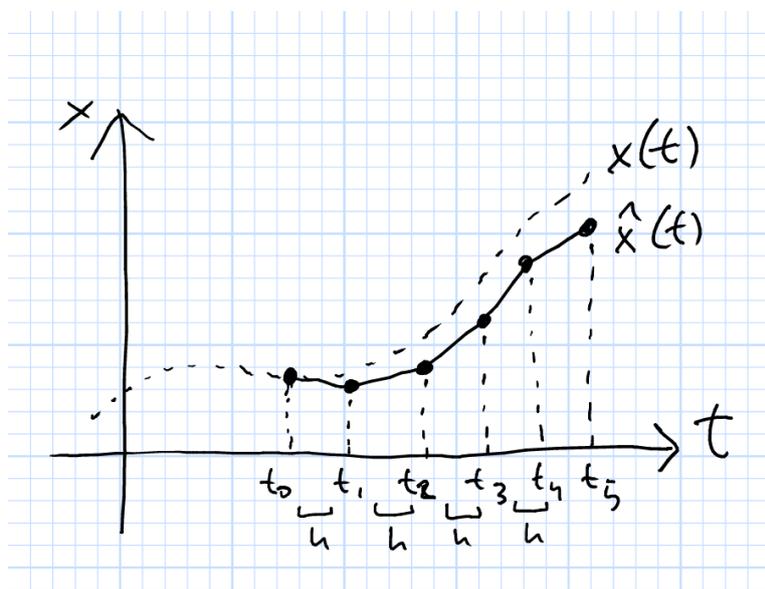


Figura 2.2: Aproximamos la función $x(t)$, que es la solución de nuestro problema de valores iniciales, con $\hat{x}(t)$, que vamos construyendo iterativamente usando segmentos lineales con pendiente igual a la tangente en ese punto.

2.2. Derivación formal

Una forma de obtener formalmente el método de Euler es paralela a la idea intuitiva. Antes hablábamos de calcular y aprovechar la tasa de cambio de x en el tiempo, ejemplificada en la figura 2.1. En esa figura, podemos ver también el segmento que une $f(a)$ con $f(b) = f(a + \Delta t)$, la secante, y su pendiente, definida formalmente como la tasa de variación media:

$$\text{TVM} = \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

Llevando esta fórmula al límite, obtenemos una expresión de esta tasa en un momento puntual (o infinitesimal). Geométricamente, según Δt se va haciendo más pequeña, la secante se va aproximando a la tangente, y por tanto la TVM a la derivada, puesto que son sus pendientes. Expresado de manera analítica, esto no es sino la definición de derivada conocida como “límite de diferencias finitas”:

$$x'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

Para nuestro método numérico, nos quedamos con una aproximación del límite consistente en tomar el valor de h tan pequeño como queramos (o podamos), y reorganizando términos obtener otra vez la ecuación (2.1):

$$x(t + hn) \approx x(t_{n-1}) + hx'(t_{n-1})$$

Lo que estamos haciendo se puede ver gráficamente en la figura 2.2. Partimos del punto t_0 conocido, y vamos avanzando poco a poco usando la tangente como aproximación de la función, calculando iterativamente los puntos t_1, t_2, \dots

2.3. Cota de error

Con el método de Euler, y como podemos intuir visualmente ya en la gráfica 2.2, lo que estamos haciendo es tomar la derivada $x'(t)$ como una constante en todo el intervalo $[t, t + h]$. El error dependerá, por tanto, de cuánto cambie $x'(t)$ en ese intervalo. Si la función f se comporta bien (para nuestros propósitos), este valor será más pequeño cuanto más pequeño sea h , y por tanto hacer intervalos más pequeños (equivalentemente, dar más pasos) aumentará la precisión.

Esta idea se puede expresar formalmente usando la expansión en serie de Taylor de la función x alrededor de t_0 , que nos da una formulación del valor en t_1 en base a las derivadas:

$$x(t_1) = x(t_0 + h) = x(t_0) + hx'(t_0) + \frac{1}{2}h^2x''(t_0) + \dots \quad (2.3)$$

Llamemos \hat{x} a nuestra solución aproximada, como en la gráfica 2.2. Esta solución está construida usando los pasos de la ecuación (2.1), es decir, $\hat{x}(t)$ es una función lineal a trozos, donde los extremos de los intervalos son los x_n calculados con el método de Euler (ecuación (2.1)). Si sustituimos los $x_n = x(t_0 + nh)$ en (2.3), el error cometido en cada paso es:

$$\begin{aligned} \text{error local} &= |\hat{x}(t_1) - x(t_1)| = \\ &= \left| \underbrace{(x(t_0) + hx'(t_0))}_{(2.2)} - \underbrace{\left(x(t_0) + hx'(t_0) + \frac{1}{2}h^2x''(t_0) + \dots\right)}_{(2.3)} \right| \\ &= \left| \frac{1}{2}h^2x''(t_0) + \dots \right| = O(h^2) \end{aligned}$$

con la última igualdad cierta si $h < 1$, por ser los términos restantes de la expansión en serie de Taylor de mayor exponente. Esto justifica nuestra intuición de que el error en cada paso es relativo a h , más concretamente es de clase $O(h^2)$. Para calcular una cota del error global cometido en (2.2), observamos que para “llegar” de t_0 a t_n hacen falta $n = \frac{t_n - t_0}{h}$ pasos, por tanto

$$\text{error global} \leq n \times \text{error local} = \frac{t_n - t_0}{h} O(h^2) = O(h) \quad (2.4)$$

lo que confirma nuestra intuición de que cuanto más nos alejemos del valor inicial, mayor error podremos estar cometiendo.

2.4. Euler implícito

Una variante del método de Euler que soluciona algunos problemas de estabilidad numérica de este método es el llamado Euler implícito o “Euler hacia atrás”. La idea básica es, en lugar de utilizar la derivada en t_0 para aproximar t_1 , utilizamos la propia derivada en el punto t_1 . Es decir, en lugar de:

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + hx'(t_n) = x(t_n) + hf(t_n, x(t_n))$$

que es (2.2) otra vez, hacemos:

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + hx'(t_{n+1}) = x(t_n) + hf(t_{n+1}, x(t_{n+1})) \quad (2.5)$$

Podemos ver que la idea subyacente es la misma, aproximar la derivada en el intervalo por el valor en uno de los extremos, por lo que el error es

del mismo orden. Sin embargo, así como en (2.2) los valores a utilizar para aproximar $x(t_{n+1})$ eran conocidos o ya calculados, en (2.5) $x(t_{n+1})$ aparece a los dos lados de la ecuación. Esto es lo que se llama una **solución implícita**, en contraste con la **solución explícita** anterior, y supone que en lugar de un cálculo directo, para hallar la solución hay que resolver la ecuación. Esto es más costoso computacionalmente, pero como hemos mencionado, proporciona una mejor estabilidad numérica a largo plazo.

2.5. Euler semi-implícito

El lector avezado se habrá dado cuenta de que los métodos explicados hasta ahora no nos sirven inmediatamente para resolver los problemas de las secciones 1.3 y 1.4. Esto es porque hasta ahora estamos resolviendo el problema de valores iniciales tal como está planteado en (1.1). En esa ecuación aparece la primera derivada, $x'(t)$, pero en nuestros problemas, que vienen de la mecánica clásica, la derivada que aparece es la segunda, $x''(t)$ (la aceleración). Por tanto, para usar el método de Euler tenemos que integrar dos veces.

Recordemos el problema de valores iniciales para la segunda derivada:

$$\begin{aligned}x''(t) &= f(t, x) \\x(0) &= x_0, \quad x'(0) = x'_0\end{aligned}$$

Usando el método de Euler explícito dos veces, obtenemos:

$$x'(t_{n+1}) = x'(t_n) + hf(t_n, x_n) \quad (2.6)$$

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + hx'(t_n) \quad (2.7)$$

Y si usáramos el método implícito, obtendríamos:

$$x'(t_{n+1}) = x'(t_n) + hf(t_{n+1}, x_{n+1}) \quad (2.8)$$

$$x(t_{n+1}) = x(t_n) + hx'(t_{n+1}) \quad (2.9)$$

Que recordamos es más costoso, por tener que resolver una ecuación implícita en cada paso. Sin embargo, observamos que (2.9) es una ecuación

explícita, pues el valor de $x'(t_{n+1})$ viene dado por el paso anterior. Así, llegamos a la idea de combinar (2.6) y (2.9), lo cual nos permite obtener el mejor comportamiento de Euler implícito en el cálculo de x sin la complejidad de la resolución de ninguna ecuación implícita:

$$\left. \begin{aligned} x'(t_{n+1}) &= x'(t_n) + hf(t_n, x_n) \\ x(t_{n+1}) &= x(t_n) + hx'(t_{n+1}) \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

2.6. Método del salto de rana

Siguiendo con esta idea de intercalar métodos en pasos alternos, el método del salto de rana [11] lo lleva un nivel más allá. En este método, los cálculos para x' y x se hacen en pasos alternos, de manera que para el mismo número de pasos que Euler requiere la mitad de cálculos. A pesar de esto, el orden del error es mayor (es decir, mejor), debido a que al utilizar como aproximación a la derivada el valor en el punto medio de cada intervalo (de longitud $2h$ ahora) funciona bastante mejor que usando los extremos. Además, este método conserva la propiedad deseable de los métodos implícitos, que conservan la energía, por lo que es muy apropiado para problemas de la física en los que otros métodos tienden a “perder energía” por la acumulación del error.

La formulación del método es:

$$\left. \begin{aligned} x'(t_{n+1/2}) &= x'(t_{n-1/2}) + hx''(t_n) \\ x(t_{n+1}) &= x(t_n) + hx'(t_{n+1/2}) \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Como podemos ver, la idea es la misma que en los métodos anteriores, pero intercalando los intervalos de integración correspondientes a la primera y segunda integrales. Esto, sin embargo, implica que necesitamos partir de $x'(t_{n-1/2})$, que no está en nuestros valores iniciales. Una solución posible es calcular este primer valor mediante otro método, o asumir algún valor razonable para él según la aplicación. Por ejemplo, si suponemos que partimos del reposo, $x'(t) = 0 \forall t \leq 0$.

Bibliografía

La información utilizada para desarrollar este trabajo está citada, en el caso de cuestiones puntuales, en el texto. El desarrollo de los métodos, las ecuaciones y las gráficas son elaboración propia a partir de [2], [3], [5] y [6]. El cálculo del error utiliza además ideas de [7].

- [1] Kurth, Rudolf (1959). Introduction to the Mechanics of the Solar System. Pergamon Press.
- [2] C. K. Birdsall and A. B. Langdon (1985). Plasma Physics via Computer Simulations, McGraw-Hill Book Company.
- [3] Atkinson, K. (1989). An Introduction to Numerical Analysis (2nd ed.). New York: John Wiley & Sons. ISBN 978-0-471-50023-0.
- [4] Diacu, F. (1996). The solution of the n-body problem. The mathematical intelligencer, 18(3), 66-70.
- [5] Sanz-Serna, J. M. (1998). Diez Lecciones de cálculo numérico. Universidad de Valladolid
- [6] Fielder, G. (2004). Integration Basics, How to integrate the equations of motion. https://gafferongames.com/post/integration_basics/ Accedido Diciembre 2018.
- [7] Nieves, A. (2007). Métodos numéricos aplicados a la ingeniería. Grupo editorial Patria. ISBN 978-970-817-080-2.
- [8] Gamboa, J.M. y Rodríguez Rodríguez, M.B (2008). Desarrollo del temario de las oposiciones de secundaria.

- [9] Mastin, L. (2010). The story of Mathematics - 18th century mathematics - Euler. https://www.storyofmathematics.com/18th_euler.html Accedido Enero 2019.
- [10] Feynman, R. P., Leighton, R. B., & Sands, M. (2011). The Feynman lectures on physics, Vol. I: The new millennium edition: mainly mechanics, radiation, and heat (Vol. 1)
- [11] Young, P. (2014). Physics 115/242, Computational Physics. <http://young.physics.ucsc.edu/115/> Accedido Diciembre 2018.